Энгельсский технологический институт

ЭТИ СГТУ имени ГАГАРИНА Ю.А.

**Д.А. Тихонов, А. А. Гильман**

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

**Энгельс 2024 г.**

**Энгельсский технологический институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Саратовский государственный технический университет
имени Гагарина Ю. А.»**

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

**Методические указания к решению задач
по «Сопротивлению материалов»
для студентов направлений**

**15.03.02 «Технологические машины и оборудование»
15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств»
18.03.01 «Химическая технология»
23.03.01 «Нефтегазовое дело»**

**очной и заочной формы обучения**

**Энгельс - 2023**

**УДК 539.3 / .8**
**ББК 30.121**
**Г47**

**Г47 Тихонов Д.А., Гильман А. А. Решение задач по сопротивлению материалов.** Методические указания к решению задач. - Энгельс: Изд-во ЭТИ (филиал) СГТУ имени Гагарина Ю.А., 2023.- 41 с.

Рецензенты: к.ф.м.н., доцент кафедры «Естественные и математические науки» Энгельсского технологического института (филиал) Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю. А. Серебряков А. В.
к.т.н., доцент кафедры «Оборудование и технологии обработки материалов» Энгельсского технологического института (филиал) Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю. А. Козлов Г. А.

Учебное пособие содержит методические указания к решению задач по дисциплине «Сопротивление материалов» и разделу «Сопротивление материалов» в дисциплинах «Механика», «Прикладная механика», «Техническая механика» в соответствии с программой подготовки бакалавров. Рассматриваются задачи по темам: «Растяжение – сжатие», «Кручение», «Изгиб», «Сложное сопротивление», «Устойчивость», «Динамические нагрузки».

Для студентов бакалавриата всех направлений подготовки.

**УДК 539.3 / .8**
**ББК 30.121**

*Одобрено редакционно-издательским советом*
*ЭТИ (филиала) СГТУ имени Гагарина Ю.А.*

*Брошюра издается в авторской редакции*

# РАСЧЕТ СТУПЕНЧАТОГО БРУСА НА РАСТЯЖЕНИЕ–СЖАТИЕ

Для ступенчатого стального бруса (рис. 1,а), выполненного из стали марки Ст. 3, имеющей предел текучести $\sigma_T$ = 240 МПа, модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, требуется:

1. Построить по длине бруса эпюры продольных сил N, нормальных напряжений σ и перемещений поперечных сечений δ.
2. Вычислить коэффициент запаса прочности бруса n.

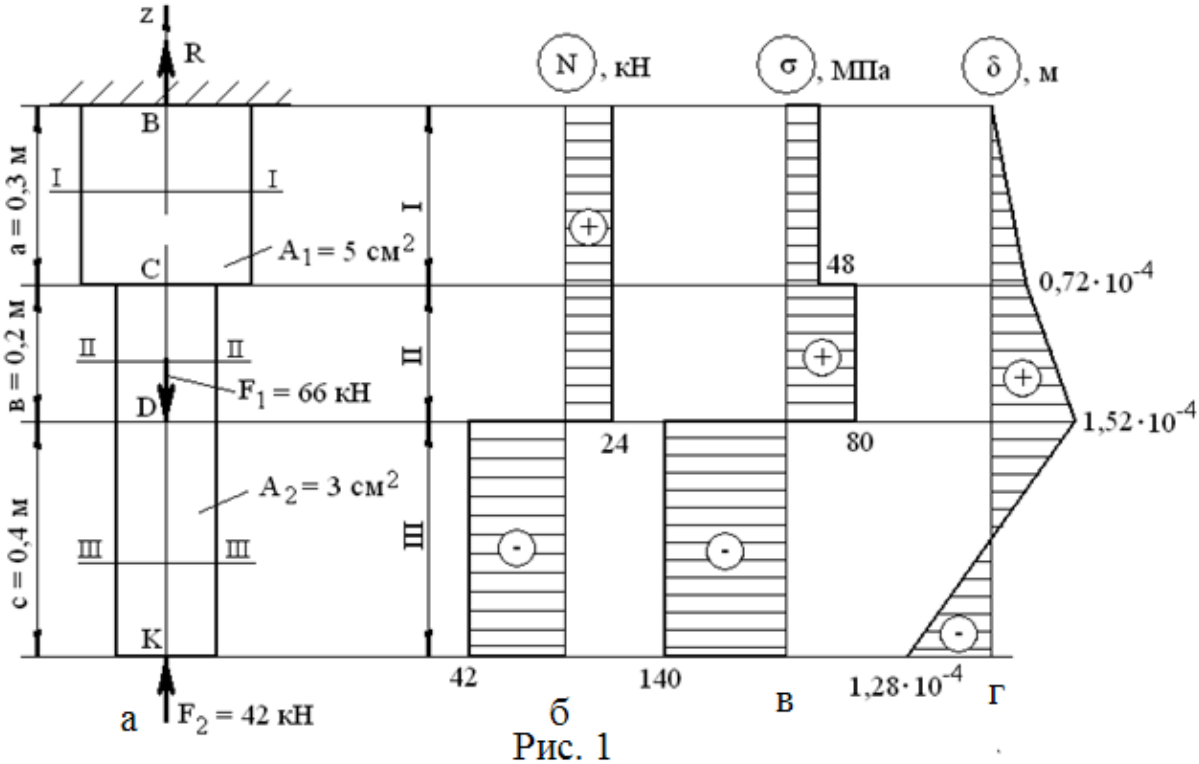


Рис. 1

Проведем ось z, совпадающую с осью бруса. Направление оси выбираем произвольно. Брус жестко защемлен верхним концом в опоре, в которой возникает опорная реакция R. Направление вектора реакции выбираем произвольно. Величину опорной реакции найдем из уравнения равновесия статики:

$$\sum F_Z = 0; \quad R - F_1 + F_2 = 0; \quad R = F_1 - F_2 = 66 - 42 = 24 \text{ кН}.$$

Разделим брус на силовые участки. Границами участков являются поперечные сечения бруса, проходящие через точки приложения внешних нагрузок и сечения, в которых изменяется площадь поперечного сечения бруса. Точки пересечения оси бруса и граничных сечений обозначим буквами B, C, D, K. Получим 3 участка бруса.

*Используем метод сечений.* На каждом участке, но не по его границам, проводим сечения I-I, II-II, III-III. При этом одну из частей бруса (бо-

лее сложную) мысленно отбрасываем и к плоскости сечения оставшейся части бруса прикладываем вектор продольной силы N в направлении внешней нормали к сечению. Рассматриваем равновесие оставшейся части бруса (рис. 2).

Уравнения равновесия статики на каждом участке запишутся:

на первом участке BC (рис. 2,а) $\sum F_Z = 0$; $R - N_1 = 0$; $N_1 = R = 24$ кН;

на втором участке CD (рис. 2,б) $\sum F_Z = 0$; $R - N_2 = 0$; $N_2 = R = 24$ кН;

на третьем участке DK (рис. 2,в) $\sum F_Z = 0$; $N_3 + F_2 = 0$; $N_3 = - F_2 = - 42$ кН.

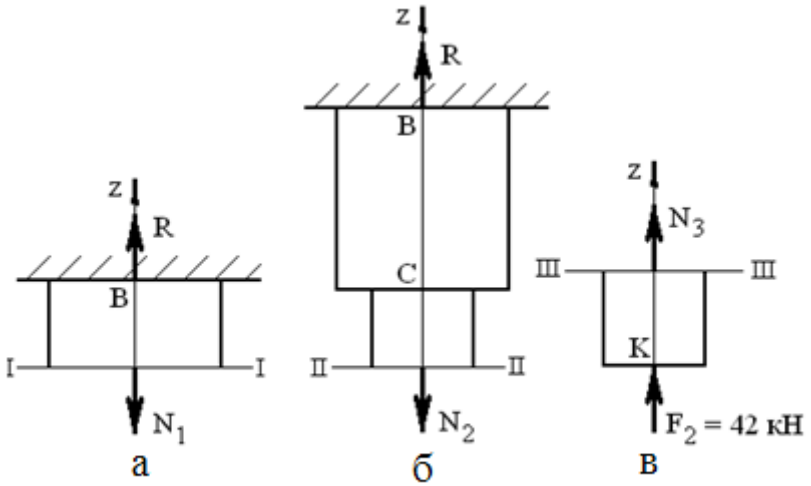


Рис. 2

Проведем линию (рис. 1,б), параллельную оси бруса y и отложим перпендикулярно ей в выбранном масштабе на каждом участке значения продольной силы, положительные, например, вправо, а отрицательные влево. Получим эпюру продольных сил N (рис. 1,б).

*Определим нормальные напряжения* σ, МПа, на каждом участке бруса

На первом участке BC

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{24 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-4}} = 4{,}8 \cdot 10^7 \text{ Па} = 48 \quad \text{МПа.}$$

На втором участке CD

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{24 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-4}} = 8 \cdot 10^7 \text{ Па} = 80 \quad \text{МПа.}$$

На третьем участке DK

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_2} = \frac{-42 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-4}} = 14 \cdot 10^7 \text{ Па} = 140 \quad \text{МПа.}$$

Здесь N - продольная сила на данном участке в Н;
А - площадь поперечного сечения данного участка в м$^2$.

По полученным значениям строим эпюру нормальных напряжений σ.

Найдем *удлинения* Δℓ, м, участков бруса

На первом участке ВС

$$\Delta\ell_1 = \frac{N_1 \cdot a}{E \cdot A_1} = \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 0{,}3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 0{,}72 \cdot 10^{-4}\,\text{м}.$$

На втором участке CD

$$\Delta\ell_2 = \frac{N_2 \cdot b}{E \cdot A_2} = \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 0{,}2}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 0{,}8 \cdot 10^{-4}\,\text{м}.$$

На третьем участке DK

$$\Delta\ell_3 = \frac{N_3 \cdot c}{E \cdot A_2} = \frac{-42 \cdot 10^3 \cdot 0{,}4}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = -2{,}8 \cdot 10^{-4}\,\text{м}.$$

Здесь ℓ - длина данного участка в м; Е -модуль Юнга материала бруса в Па.

Определим *перемещения* сечений бруса, проходящих через границы участков.

Перемещение сечения, проходящего через точку В равно нулю, так как в жесткой заделке нет перемещений, т.е. $\delta_B = 0$.

Между точками В и С находится первый участок. Перемещение сечения С будет равно

$$\delta_C = \delta_B + \Delta\ell_1 = 0 + 0{,}72 \cdot 10^{-4} = 0{,}72 \cdot 10^{-4}\ \text{м}.$$

Между точками С и D находится второй участок. Перемещение сечения D будет равно

$$\delta_D = \delta_C + \Delta\ell_2 = 0{,}72 \cdot 10^{-4} + 0{,}8 \cdot 10^{-4} = 1{,}52 \cdot 10^{-4}\ \text{м}.$$

Между точками D и K находится третий участок. Перемещение сечения D будет равно

$$\delta_K = \delta_D + \Delta\ell_3 = 1{,}52 \cdot 10^{-4} - 2{,}8 \cdot 10^{-4} = -1{,}28 \cdot 10^{-4}\ \text{м}.$$

По полученным значения строим эпюру перемещений сечений бруса δ (рис. 1,г).

Найдем коэффициент запаса прочности бруса по формуле

$$n = \frac{\sigma_T}{|\sigma_{MAX}|} = \frac{240}{140} = 1{,}71.$$

## РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Абсолютно жесткий брус OD (рис. 3,а) закреплен с помощью шарнирно–неподвижной опоры и двух стержней и нагружен силой Q. Требуется:

1) найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу Q;

2) из расчета по допускаемым напряжениям найти допускаемую нагрузку [Q], приравняв большее из напряжений в двух стержнях допускаемому напряжению [σ] = 160 МПа;

3) из расчета по допускаемым нагрузкам найти предельную грузоподъемность системы $Q_T^k$ и допускаемую нагрузку $Q_{ДОП}$, если предел текучести $\sigma_T$ = 240 МПа и запас прочности n = 1,5;

4) сравнить величины [Q] и $Q_{ДОП}$, полученные при расчете по допускаемым напряжениям и допускаемым нагрузкам.

Определим усилия и напряжения в стержнях. При действии силы Q в стержнях 1 и 2 будут возникать продольные силы $N_1$ и N2. Так как неизвестных четыре – две реакции шарнирно-непродвижной опоры O: вертикальная R и горизонтальная H, две продольные силы в стержнях - $N_1$ и $N_2$ (рис. 3,б), то они не могут быть определены из трех уравнений равновесия статики (ΣX = 0, ΣY = 0, ΣM = 0). Поэтому заданная система является один раз статически неопределимой.

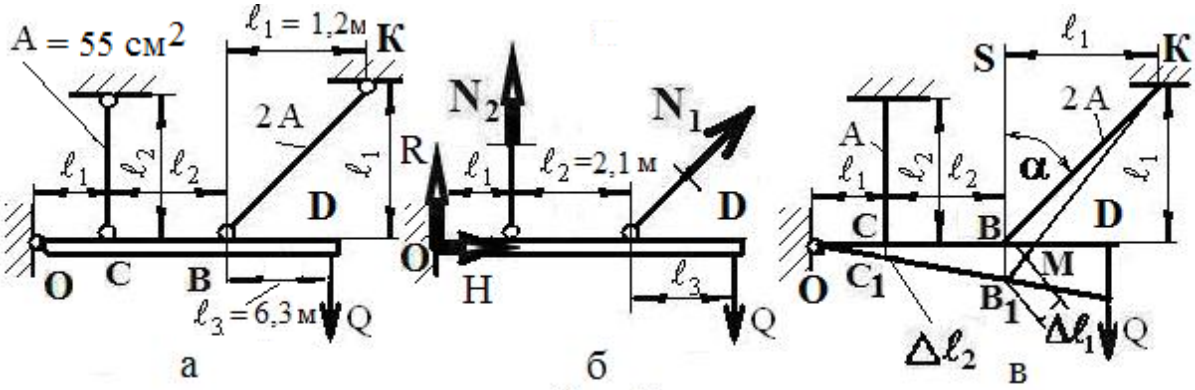


Рис. 3

Выразим $N_1$ и $N_2$ через заданную нагрузку Q. В два уравнения равновесия $\sum F_X = 0$ и $\sum F_Y = 0$ входят ненужные для расчета конструкции реакции R и H. Используем третье уравнение равновесия статики

$$\sum M_O = N_1 \cos\alpha \cdot (\ell_1 + \ell_2) + N_2 \cdot \ell_1 - Q \cdot (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) = 0. \qquad (1)$$

Уравнение одно, а неизвестных два $N_1$ и $N_2$.

Для составления дополнительного уравнения рассмотрим деформацию системы. Под действием нагрузки Q абсолютно жесткий брус OD, оставаясь прямым, повернется вокруг шарнира O (рис. 3,в). Точки B и C опишут дуги, которые вследствие малости угла $C_1OC$ заменим перпендикулярами $BB_1$ и $CC_1$ к оси жесткого бруса OD.

Величина $\Delta\ell_2 = BB_1$ представляет собой удлинение второго стержня. Удлинение первого стержня $\Delta\ell_1$ найдем, опустив перпендикуляр BM из точки B на $B_1K$. Вследствие малости деформации считаем, что $\angle SB_1K \approx \angle SBK = \alpha$. Из прямоугольного треугольника $BB_1M$ найдем $\Delta\ell_1 = MB_1 = BB_1 \cdot \cos\alpha$, или $BB_1 = MB_1 / \cos\alpha = \Delta\ell_1 / \cos\alpha$.

Свяжем $\Delta\ell_1$ и $\Delta\ell_2$. Из подобия треугольников $\Delta\, OCC_1$ и $\Delta\, OBB_1$ следует, что

$$\frac{CC_1}{BB_1} = \frac{OC}{OB} = \frac{\ell_1}{\ell_1 + \ell_2} = \frac{1{,}2}{1{,}2 + 2{,}1} = 0{,}36, \text{ откуда } CC_1 = 0{,}36 * BB_1$$

Так как $BB_1 = \Delta\ell_1 / \cos\alpha$, $CC_1 = \Delta\ell_2$, то $\Delta\ell_2 = 0{,}36\, \Delta\ell_1 / \cos\alpha$. (2)

Это и есть дополнительное уравнение перемещений.

Используем закон Гука $\Delta\ell = \dfrac{N \cdot \ell}{E \cdot A}$.

Так как из $\Delta$ SBK видно, что $\dfrac{\ell_1}{\cos\alpha}$ - длина стержня 1и дано, что $A_1 = 2A$ - площадь стержня 1, $\ell_2$ – длина стержня 2 и $A_2 = A$ - площадь стержня 2, то абсолютные удлинения стержней будут равны

$$\Delta\ell_1 = \frac{N_1 \cdot \ell_1}{E \cdot 2 \cdot A \cos\alpha} \quad \text{и} \quad \Delta\ell_2 = \frac{N_2 \cdot \ell_2}{E \cdot A}.$$

Подставим $\Delta\ell_1$ и $\Delta\ell_2$ в уравнение (2)

$$\frac{N_2 \ell_2}{E \cdot A} = \frac{N_1 \cdot \ell_1}{E \cdot 2 \cdot A \cos^2\alpha} 0{,}36.$$

Сократим правую и левую части этого выражения на жесткость при растяжении-сжатии - EA, подставим заданные численные значения $\ell_1$, $\ell_2$ и $\alpha = 45°$ (см. рис.3,в), т.е. $\cos^2\alpha = 0{,}5$.

Получим $N_2 = 0{,}208 * N_1$.

Подставляем $N_2 = 0{,}208 * N_1$ в уравнение (1). Находим

$$N_1 = 3{,}717 * Q, \quad N_2 = 0{,}208 * N_1 = 0{,}208 * 3{,}717 * Q = 0{,}772 * Q.$$

Из условия задачи $A=55$ см$^2$.

Тогда нормальные напряжения $\sigma_1$ и $\sigma_2$ в стержнях будут равны

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{N_1}{2A} = 337{,}9*Q \text{ Па}, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{N_2}{A} = 140{,}4*Q \text{ Па}.$$

Определим допускаемую силу [Q] из расчета по допускаемым напряжениям. Так как напряжение в первом стержне больше, чем во втором, то первый стержень более опасен. Приравняем напряжение в первом стержне и допускаемое напряжение $[\sigma]=160$ МПа.

$\sigma_1 = [\sigma]$. Получим $337{,}9*[Q] = 160*10^6$. Откуда $[Q] = 473{,}45$ кН.

Определим допускаемую силу $Q_{ДОП.}$ из расчета по допускаемым нагрузкам, при которых материал всех стержней течет. При текучести напряжения в стержнях равны $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_T = 240$ МПа – пределу текучести материала. Тогда усилия в стержнях будут:

$$N_1^T=\sigma_T\cdot A_1=\sigma_T\cdot 2A, \; N_2^T=\sigma_T\cdot A_2=\sigma_T\cdot A.$$

Подставляем эти выражения в уравнение равновесия статики (1) для состояния текучести стержней системы

$$N_1^T\cos\alpha(\ell_1+\ell_2)+N_2^T\ell_1=Q_T^K(\ell_1+\ell_2+\ell_3);$$

$$240\cdot10^6\cdot2\cdot55\cdot10^{-4}\cos\alpha(1{,}2+2{,}1)+240\cdot10^6\cdot55\cdot10^{-4}\cdot1{,}2=(1{,}2+2{,}1+6{,}3)\cdot Q_T^K.$$

Откуда находим предельную грузоподъемность системы $Q_T^k = 806{,}6$ кН.

Определим допускаемую нагрузку $Q_{ДОП} = \frac{Q_T^k}{n} = \frac{Q_T^K}{1{,}5} = 537{,}74$ кН,

где $n = 1{,}5$ – заданный коэффициент запаса прочности.

Сравнивая полученные результаты, видим, что допускаемая нагрузка $Q_{ДОП}$, определенная из расчета по допускаемым нагрузкам, больше допускаемой нагрузки [Q], определенной из расчета по допускаемым напряжениям в $\frac{Q_{ДОП}}{[Q]} = 1{,}1$ раза.

Способ расчета по допускаемым нагрузкам для статически неопределимых систем позволяет вскрыть дополнительные резервы прочности, повысить несущую способность системы и указывает на возможность более экономного расходования материала.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Рассмотрим пример на определение геометрических характеристик плоского сечения (рис. 6). Требуется:

1) определить положение центра тяжести поперечного сечения;
2) найти осевые и центробежный моменты инерции относительно центральных осей $x_C$ и $y_C$;
3) определить положение главных центральных осей u и v;
4) найти моменты инерции относительно главных центральных осей;
5) вычертить сечение в масштабе и указать на нем все оси.

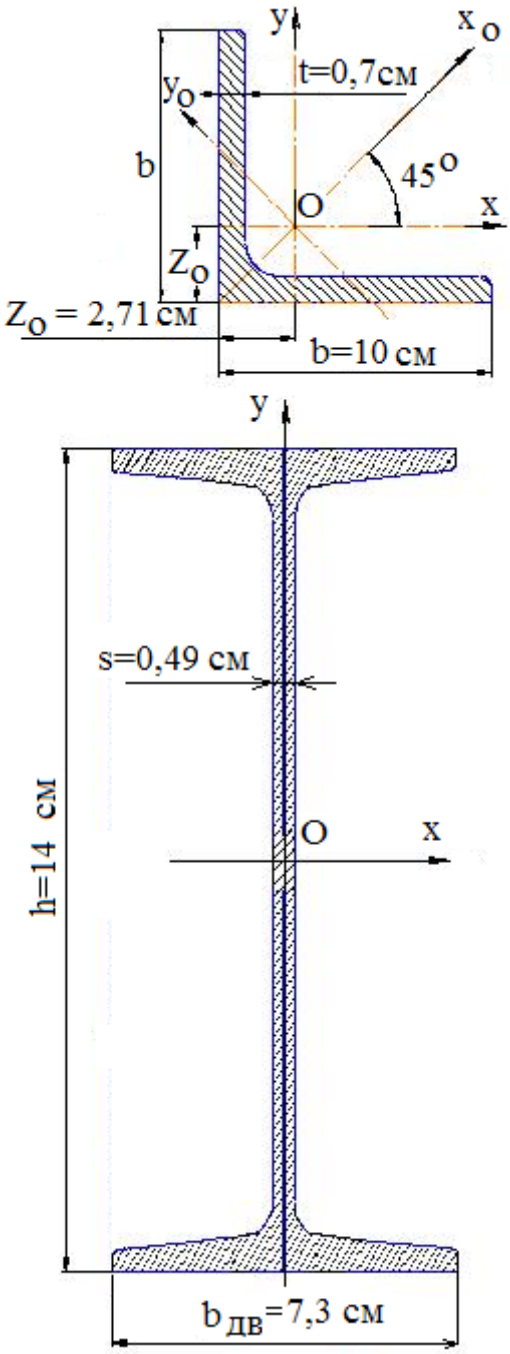

Рис. 4

Выпишем из таблиц сортамента все данные, необходимые для расчёта, и зарисуем профили элементов сечения (рис. 4).

Двутавр № 14 по ГОСТ 8238-89. Площадь A = 17,4 см$^2$. Моменты инерции относительно собственных центральных осей: $J_x$ = 572 см$^4$, $J_y$ = 41,9 см$^4$. Так как цетральные оси являются осями симметрии, то это главные оси и центробежный момент относительно них равен нулю, $J_{xy}$=0.

Уголок равнополочный 100x100x7 по ГОСТ 8509-86. Площадь A = 13,75 см$^2$. Моменты инерции $J_x = J_y$ = 130,59 см$^4$, $J_{X_o}$ = 207,01 см$^4$, $J_{y_o}$ = 54,16 см$^4$. Расстояние от центра тяжести уголка до наружных граней полок $Z_0$ = 2,71 см. Угол между осями x и $x_0$ равен 45°. Центробежный момент инерции уголка $J_{xy}$ находится по формуле

$$J_{xy} = \frac{J_{x_0} - J_{y_0}}{2}\sin 2\alpha. = \frac{207{,}01 - 54{,}16}{2}\sin(2\cdot 45^0) = -76{,}43 \text{ см}^4$$

Так как для равнополочного уголка $\alpha = 45^o$, то $\sin 2\alpha = \sin 90^o = 1$. Знак центробежного момента инерции уголка выбирается в соответствии с рис. 5.

Прежде чем приступить к дальнейшему расчёту, необходимо с соблюдением масштаба начертить сечение (рис. 6). Так как сечение состоит из двух элементов I и II, необходимо ввести соответствующие индексы в обозначении центров тяжестей ($0_1$, $0_2$), центральных осей $x_1$, $y_1$, $x_2$, $y_2$ и соответствующих моментов инерции.

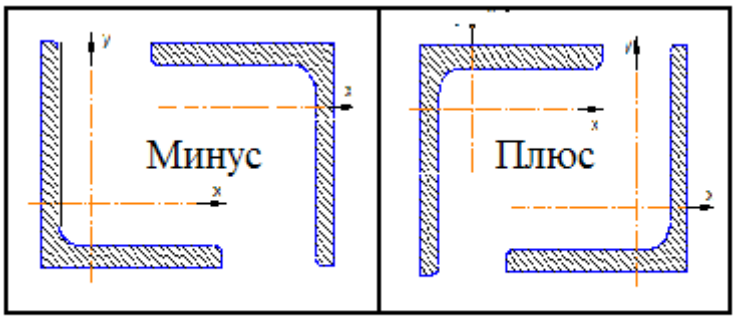


Рис. 5

Определим координаты центра тяжести сечения относительно вспомогательных осей x и y. Оси удобно провести через центр тяжести одной из фигур, например, двутавра. Тогда координаты центров тяжести элементов в системе осей x и y будут равны $O_1(0;0)$,
$O_2(-b_{ДВ}/2+Zo=-7,3/2+2,71=-0,94$ см; $h/2+Zo=7+2,71=9,71$ см).

Координаты центра тяжести сечения находятся по следующим формулам:

$$X_C = \frac{S_y}{A} = \frac{A_1 \cdot x_{01} + A_2 \cdot x_{02}}{A_1 + A_2} = \frac{17,4 \cdot 0 + 13,57 \cdot (-0,94)}{17,4 + 13,57} = -0,415 \text{ см.}$$

$$Y_C = \frac{S_X}{A} = \frac{A_1 \cdot y_{01} + A_2 \cdot y_{02}}{A_1 + A_2} = \frac{17,4 \cdot 0 + 13,57 \cdot 9,71}{17,4 + 13,75} = 4,286 \text{ см.}$$

В масштабе на рисунок 6 наносим точку C с координатами $x_c$ = -0,415 см и $y_c$ = 4,286 см и проводим через т. C оси $x_c$ и $y_c$, параллельные осям x и y.

Пользуясь формулами связи между координатами точки относительно параллельных осей координат, находим координаты центров тяжестей $O_1$ и $O_2$ двутавра и уголка в полученной системе координат $x_cCy_c$.:

$$X_{CO_1} = -X_C = 0,415 \text{ см}; \qquad Y_{CO_1} = -Y_C = -4,286 \text{ см};$$

$$X_{CO_2} = (-0,94) - X_C = -0,525 \text{ см}; \quad Y_{CO_2} = 9,71 - Y_C = 5,424 \text{ см.}$$

Для проверки правильности нахождения координат центра тяжести сечения найдём статистические моменты всего сечения относительно центральных осей $x_c$ и $y_c$.:

$$S_{X_C} = A_1 \cdot Y_{CO_1} + A_2 \cdot Y_{CO_2} = 17,4 \cdot (-4,286) + 13,75 \cdot 5,424 = 0,0036 \text{ см}^3;$$

$$S_{Y_C} = A_1 \cdot X_{CO_1} + A_2 \cdot X_{CO_2} = 17,4 \cdot 0,415 + 13,75 \cdot (-0,525) = -0,00225 \text{ см}^3.$$

Так как статические моменты сечения относительно центральных осей должны быть равны нулю, то близкие к нулю значения $S_x$ и $S_y$ пока-

зывают, что координаты центра тяжести сечения найдены правильно. Отличие их от нуля – накопленная погрешность вычисления.

Определим осевые и центробежный моменты инерции сечения относительно произвольных центральных осей $x_c y_c$. Используем формулы зависимостей между моментами инерции относительно параллельных осей:

$$J_{X_C} = J^{I}_{X_C} + J^{II}_{X_C} = (J^{I}_{X_1} + A_1 Y^2_{CO_1}) + (J^{II}_{X_2} + A_2 Y^2_{CO_2}) =$$

$=572+14{,}7\cdot(-4{,}286)^2 + 130{,}59+13{,}75\cdot(5{,}424)^2 = 1426{,}7$ см$^4$.

$$J_{Y_C} = J^{I}_{Y_C} + J^{II}_{Y_C} = (J^{I}_{Y_1} + A_1 \cdot X^2_{CO_1}) + (J^{II}_{Y_2} + A_2 \cdot X^2_{CO_2}) =$$

$= 41{,}9+14{,}7\cdot(0{,}415)^2 + 13{,}75\cdot(-0{,}525)^2 = 179{,}3$ см$^4$.

$$J_{X_C Y_C} = J^{I}_{X_C Y_C} + J^{II}_{X_C Y_C} = (J^{I}_{X_1 Y_1} + A_1 \cdot X_{CO_1} \cdot Y_{CO_1}) + (J^{II}_{X_2 Y_2} + A_2 \cdot X_{CO_0} \cdot Y_{CO_2}) =$$

$= 0+ 14{,}7\cdot(0{,}415)(-4{,}286) -76{,}43+ 13{,}75\cdot(-0{,}525)(5{,}424)= -146{,}5$ см$^4$.

Определим направление главных центральных осей u и v. Тангенс угла наклона главных центральных осей u и v к произвольным центральным осям $x_c$ и $y_c$ определяется по формуле

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\cdot J_{X_C Y_C}}{J_{Y_C} - J_{X_C}} = \frac{2\cdot(-146{,}5)}{179{,}3-1426{,}7} = \frac{-293}{-1247{,}4} = 0{,}235.$$

По найденному значению тангенса с помощью таблиц или калькулятора находим значение угла $2\alpha = 13{,}22^{o}$, откуда $\alpha = 6{,}61^{o}$. Положительный угол $\alpha$ откладываем от оси $x_c$ против хода часовой стрелки и определяем положение одной из главных центральных осей. Вторая главная центральная ось проводится через центр тяжести сечения т.С перпендикулярно первой оси. Проведем на рисунке 6 главные центральные оси u и v.

Для проверки правильности определения положения главных центральных осей найдём центробежный момент инерции относительно этих осей u и v по формуле

$$J_{UV} = \frac{J_{X_C} - J_{Y_C}}{2}\cdot\sin 2\alpha + J_{X_C Y_C}\cdot\cos 2\alpha =$$

$$\frac{1426.7-179.3}{2}\cdot\sin 6.61^{O} - 146.5\cdot\cos 6.61^{O} = 0{,}04 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции относительно главных осей должен быть равным нулю. Полученная близкая к нулю величина $J_{UV}$ показывает, что положение главных осей определено достаточно точно.

Определим моменты инерции относительно главных осей. Величины главных моментов инерции находятся по формуле:

$$J_{\frac{max}{min}} = \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{x_c} - J_{y_c}}{2}\right)^2 + J^2_{x_c y_c}} = \frac{1426{,}7+179{,}3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1426{,}7-179{,}3}{2}\right)^2 + (-146{,}5)^2} =$$

$= 803 \pm 640{,}675.$

Главная центральная ось, относительно которой момент инерции будет максимальным ($J_{max}$), составляет меньший угол с той из произвольных центральных осей, момент инерции относительно которой имеет большее значение. В данном случае - это ось u.

Таким образом, получаем:

$J_{max} = J_U = 1443{,}7$ см$^4$; $J_{min} = J_V = 162{,}3$ см$^4$.

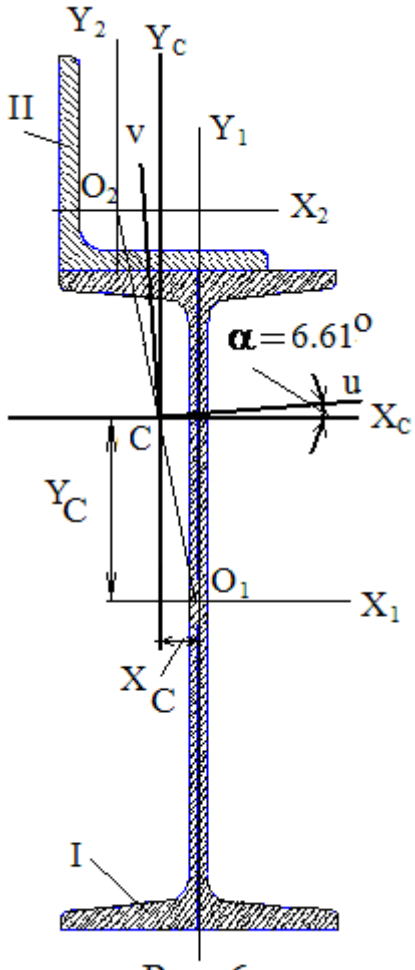

Рис. 6

Для контроля определения $J_v$ и $J_u$ проверим, выполняется ли равенство:

$$J_{x_c} + J_{y_c} = J_v + J_u;$$

$$J_{x_c} + J_{y_c} = 1426.7 + 179.3 = 1606 \text{ см}^4;$$

$$J_v + J_u = 1443.4 + 162.3 = 1606 \text{ см}^4.\ \text{см}^4.$$

С той же целью найдём центробежный момент инерции $J_{x_c y_c}$ по известным главным центральным моментам инерции $J_v$ и $J_u$ и углу $\alpha$ по формуле

$$J_{x_c y_c} = \frac{J_v - J_u}{2} \cdot \sin 2\alpha =$$

$$= \frac{1443{,}4 - 162{,}3}{2} \cdot \sin 13.22^{O} = 146.51 \text{ см}^4$$

Незначительное отличие от ранее найденного значения $J_{X_C Y_C}$ =146.5 см$^4$ свидетельствует о достаточной точности определения положения главных центральных осей и величин главных центральных моментов инерции.

## РАСЧЕТ ВАЛА НА КРУЧЕНИЕ

Стальной вал, ($G = 0{,}8\cdot10^5$ МПа), закручивается двумя моментами $m_1 = 11$ кНм и $m_2 = 6$ кНм (рис. 7*а*). Два участка вала сплошные - имеют форму поперечного сечения в виде кругов диаметрами $d_1$ и $d_2$, а третий участок вала полый - имеют форму поперечного сечения в виде кольца с отношением внутреннего диаметра d к наружному D, равным $d/D = 0{,}45$.

1. Построить эпюру крутящих моментов $M_K$.
2. Из условия прочности по допускаемым касательным напряжениям $[\tau] = 80$ МПа определить размеры поперечных сечений участков вала и округлить их до ближайшей большей величины в мм;
3. Построить эпюру углов поворота сечений вала α;

Принять: $a = 0{,}1\ell_3 = 0{,}63$ м.

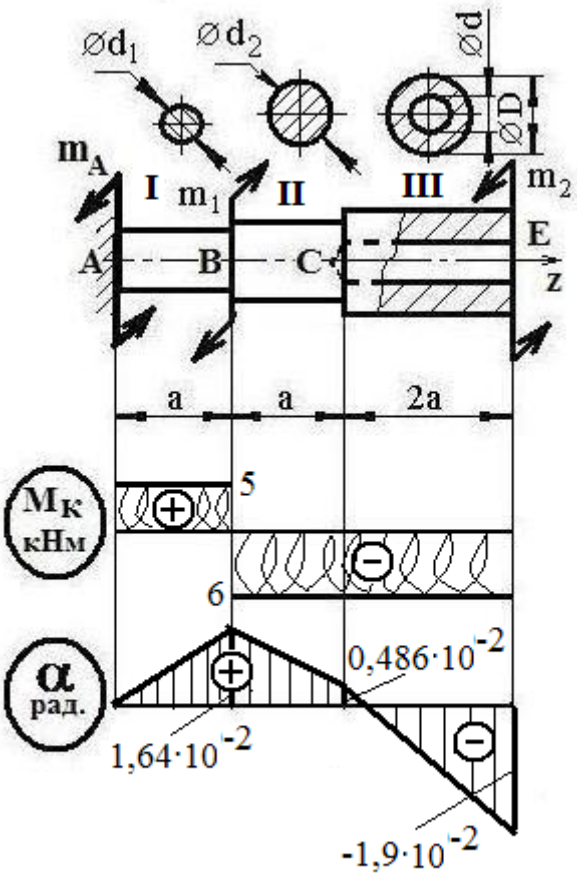


Рис. 7

Обозначим и найдем реактивный момент $m_A$, возникающий в опоре А.
Ось вала обозначим через z.
Из уравнения равновесия статики:

$$\sum M_Z = 0; \quad m_A - m_1 + m_2 = 0;$$
$$m_A = m_1 - m_2 = 5 \text{ кНм}.$$

Разделим вал на три участка I, II и III, и используем метод сечений.

Найдем крутящие моменты на участках вала:
на участке АВ $M_{K1} = m_A = 5$ кНм;
на участке ВС $M_{K2} = m_A - m_1 = -6$ кНм;
на участке СЕ $M_{K3} = -m_2 = -6$ кНм.

Построим эпюру крутящих моментов $M_K$.

Следует иметь в виду, что в сечении, в котором к валу приложен внешний закручивающий момент, ордината эпюры изменяется скачкообразно на величину, равную значению этого момента.

Определим размеры поперечных сечений вала из расчета на прочность. Условие прочности при кручении имеет вид $\dfrac{|M_{K\max}|}{W_p} \le [\tau]$,

где $M_{Kmax}$ – максимальный крутящий момент в Нм; $W_p$ – полярный момент сопротивления поперечного сечения в м$^3$; [τ] – допускаемое касательное напряжение в Па.

Изобразим поперечные сечения участков вала с размерами. Для определения размеров поперечных сечений вала используется формула $W_P \geq \frac{|M_{K\max}|}{[\tau]}$, полученная из условия прочности.

На участке АВ требуемый полярный момент сопротивления поперечного сечения: $W_{P1}^{TP} \geq \frac{|M_{K1}|}{[\tau]} = \frac{|5| \cdot 10^3}{80 \cdot 10^6} = 62{,}5 \cdot 10^{-6}\,м^3 = 62{,}5\ см^3$.

Так как на первом участке АВ вал имеет круглое поперечное сечение, то $W_{P1} = \pi \cdot d_1^3 / 16 \approx 0{,}2 \cdot d_1^3$.

Приравниваем это выражение требуемому полярному моменту сопротивления $W_{P1}^{TP}$. $0{,}2 \cdot d_1^3 = 62{,}5\ см^3$

Откуда $d_1 = \sqrt[3]{\frac{62{,}5}{0{,}2}} = 6{,}79$ см. Округляем до значения $d_1 = 70$ мм.

На участке ВС требуемый полярный момент сопротивления поперечного сечения:

$$W_{P2}^{TP} \geq \frac{|M_{K2}|}{[\tau]} = \frac{|-6| \cdot 10^3}{80 \cdot 10^6} = 75 \cdot 10^{-6}\,м^3 = 75\ см^3.$$

Так как на втором участке ВС вал имеет круглое поперечное сечение, то $W_{P2} = \pi \cdot d_2^3 / 16 \approx 0{,}2 \cdot d_2^3$.

Приравниваем это выражение требуемому полярному моменту сопротивления $W_{P2}^{TP}$. $0{,}2 \cdot d_2^3 = 75\ см^3$

Откуда $d_2 = \sqrt[3]{\frac{75}{0{,}2}} = 7{,}21$ см. Округляем до значения $d_2 = 80$ мм.

На участке СЕ требуемый полярный момент сопротивления поперечного сечения:

$$W_{P3}^{TP} \geq \frac{|M_{K3}|}{[\tau]} = \frac{|-6| \cdot 10^3}{80 \cdot 10^6} = 75 \cdot 10^{-6}\,м^3 = 75\ см^3$$

Так как на третьем участке СЕ вал имеет кольцевое поперечное сечение, то $W_{P3} = \pi \cdot D^3 \cdot (1 - d^4 / D^4) / 16$

$$W_{P3} = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \frac{d^4}{D^4}) \approx 0{,}2D^3(1 - (\frac{d}{D})^4) = 0{,}2 \cdot D^3(1 - 0{,}45^4) = 0{,}192\ D^3.$$

Приравниваем это выражение требуемому полярному моменту сопротивления $W_{p3}^{тр}$. $0{,}192\ D^3=75$ см$^3$

Откуда D=7,31 см. Округляем до значения D=80 мм.

Так как d/D= 0,45, то d=0,45·D= 36 мм.

Для построения эпюры углов поворота сечений вала α найдем углы закручивания участков вала по формуле $\varphi = \dfrac{M_к \cdot \ell}{G \cdot J_p}$,

где $M_к$ – крутящий момент на рассматриваемом участке в Нм; $\ell$ – длина участка вала в м; G – модуль сдвига материала в Па; $J_p$ – полярный момент инерции поперечного сечения вала на рассматриваемом участке в м$^4$.

Вначале найдем жесткости на кручение $GJ_P$ участков вала.

На участке АВ

$GJ_{P1} = G \cdot 0{,}1 \cdot d_1^4 = 0{,}8 \cdot 10^{11} 0{,}1 \cdot (70 \cdot 10^{-3})^4 = 192{,}1 \cdot 10^3$ Нм$^2$.

На участке ВС

$GJ_{P2} = G \cdot 0{,}1 \cdot d_2^4 = 0{,}8 \cdot 10^{11} 0{,}1 \cdot (80 \cdot 10^{-3})^4 = 327{,}7 \cdot 10^3$ Нм$^2$.

На участке СЕ

$GJ_{P3} = G \cdot 0{,}1 D^4 (1 - (\dfrac{d}{D})^4) = 0{,}8 \cdot 10^{11} (80 \cdot 10^{-3})^4 \cdot (1 - (0{,}45)^4) = 314{,}2 \cdot 10^3$ Нм$^2$.

Тогда

$$\varphi_1 = \frac{M_{K1} \cdot a}{G \cdot J_{p1}} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 0{,}63}{192{,}1 \cdot 10^3} = 1{,}64 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

$$\varphi_1 = \frac{M_{K1} \cdot a}{G \cdot J_{p1}} = -\frac{6 \cdot 10^3 \cdot 0{,}63}{327{,}7 \cdot 10^3} = -1{,}15 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

$$\varphi_3 = \frac{M_{к_3} \cdot 2a}{G \cdot J_{p3}} = -\frac{6 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 0{,}63}{314{,}2 \cdot 10^3} = -2{,}4 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

Определим углы поворота сечений вала. В опоре $\alpha_A = 0$.

$\alpha_B = \alpha_A + \varphi_1 = 0 + (1{,}64) \cdot 10^{-2} = 1{,}64 \cdot 10^{-2}$ рад.

$\alpha_C = \alpha_B + \varphi_2 = 1{,}64 \cdot 10^{-2} + (-1{,}15) \cdot 10^{-2} = 0{,}486 \cdot 10^{-2}$ рад.

$\alpha_E = \alpha_C + \varphi_3 = 0{,}486 \cdot 10^{-2} + (-2{,}4) \cdot 10^{-2} = -1{,}9 \cdot 10^{-2}$ рад.

Строим эпюру углов поворота сечений вала α.

## РАСЧЕТ ШАРНИРНО-ОПЕРТОЙ БАЛКИ НА ИЗГИБ

Для стальной балки, изображенной на рис. 8, требуется:

1. Построить эпюры поперечной силы $Q_Y$ и изгибающего момента $M_X$.
2. Подобрать из условия прочности по допускаемым напряжениям поперечные сечения в виде круга, квадрата, двутавра и двух швеллеров. Стенки двутавра и двух швеллеров параллельны действующей нагрузке.
3. Сравнить принятые сечения балок по экономичности.

Принять: $F = F_1$, $m = m_1$, $[\sigma] = 160$ МПа.

Расчет проведен для: $\ell_1$=1,2 м, $\ell_2$ =2,1 м, $\ell_3$ =6,3 м,

$F = F_1 = 40$ кН, $m = m_1 = 11$ кНм, $q = 6$ кНм.

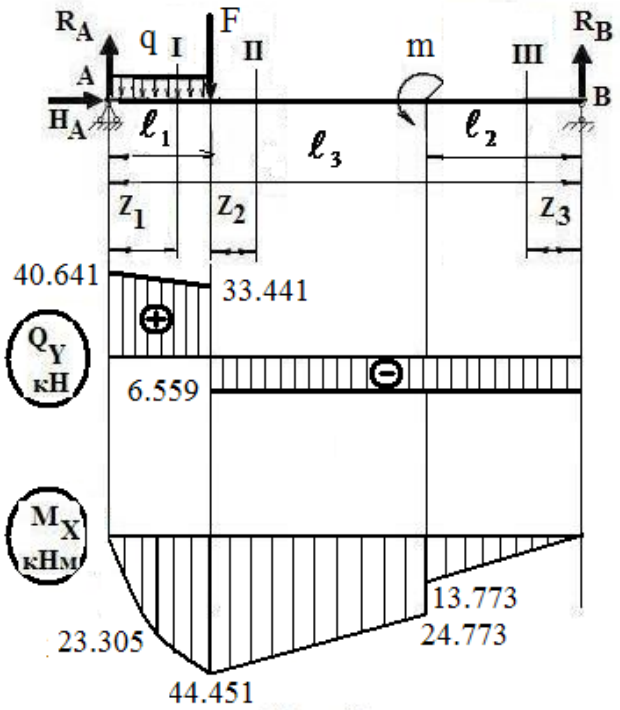


Рис. 8

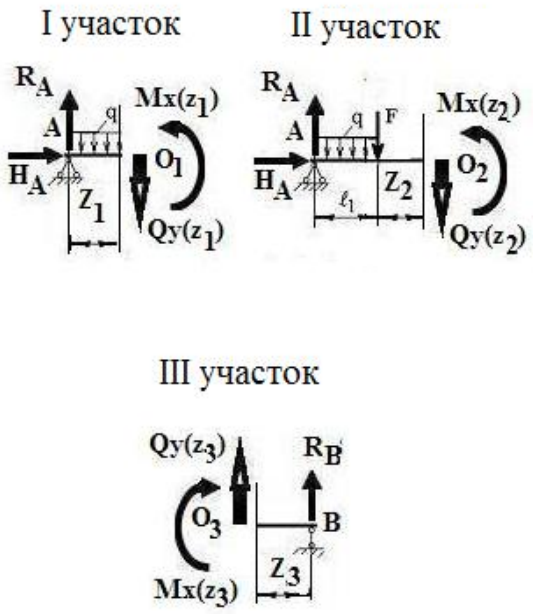


Рис. 9

Определим опорные реакции. В шарнирно-неподвижной опоре А возникают две составляющих реакции – вертикальная $R_A$ и горизонтальная $H_A$. В шарнирно-подвижной опоре В – одна вертикальная реакция $R_B$. Для определения трёх неизвестных реакций имеем три уравнения равновесия:

$\sum F_z = 0$; $H_A = 0$.

$\sum m_A = 0$; $-q\ell_1\ell_1/2 - F\ell_1 + m + R_B\ell_3 = 0$.

Откуда $$R_B = \frac{q\cdot\frac{\ell_1^2}{2} + F\cdot\ell_1 - m}{\ell_3} = \frac{6\frac{1{,}2^2}{2} + 40\cdot 1{,}2 - 11}{6{,}3} = 6{,}559\ \text{кН}$$

$\sum m_B = 0$;  $-R_A\ell_3+q\ell_1(\ell_3-\ell_1/2)+F(\ell_3-\ell_1)+m = 0$.

Откуда

$$R_A = \frac{q\cdot\ell_1\cdot\left(\ell_3-\frac{\ell_1}{2}\right)+F\cdot(\ell_3-\ell_1)+m}{\ell_3} = \frac{6\cdot 1{,}2\cdot(6.3-\frac{1{,}2}{2})+40\cdot(6{,}3-1{,}2)+11}{6{,}3} = 40{,}641 \text{ кН}$$

Для проверки правильности нахождения реакций используем уравнение:

$\sum F_y = 0$.  $R_A - q\,\ell_1 + R_B - F = 0{,}005$

Опорные реакции найдены правильно.

Разбиваем конструкцию балки на участки I, II, III и используем метод сечений.

Найдем значения поперечных сил $Q_Y(z)$ и изгибающих моментов $M_X(z)$ на участках балки и построем их эпюры.

Участок I (рис. 9): $0 \le z_1 \le \ell_1 = 1{,}2$ м.

Проводим сечение 1-1 в пределах участка I на расстоянии $z_1$ от точки A (рис. 8). Сечение проводится в произвольном месте участка I, но только не по его граничным точкам. Координата $z_1$ при этом изменяется от 0 до $\ell_1$, то есть. Отбросим правую часть балки и рассмотрим равновесие левой – более простой части балки.

$\sum F_Y = 0$.  $R_A-Q_Y(z_1)-qz_1 = 0$,  откуда  $Q_Y(z_1) = R_A-q\,z_1$.

Это линейная функция, то есть зависимость $Q_y$ от $z_1$ описывается прямой линией – такой вид будет иметь эпюра $Q_y$ на участке I. Для построения прямой достаточно найти её значение в двух точках, например, при $z_1 = 0$ и при $z_1 = \ell_1$, то есть на границах участка

$Q_Y(0) = R_A = 40{,}641$ кН.  $Q_Y(\ell_1) = R_A-q\ell_1=40{,}641-6\cdot 1{,}2= 33{,}441$ кН.

По полученным значениям строем эпюру $Q_Y$ на участке I (рис. 8).

$\sum m_{O_1} = 0$  $-R_Az_1+qz_10{,}5z_1+M_X(z_1) = 0$,  откуда  $M_X(z_1) = R_Az_1-0{,}5q\,z_1^2$.

Это парабола, для построения которой необходимо иметь, как минимум, значения функции $M_x(z_1)$ в трёх точках(в двух граничных точках участка и в какой-либо третьей точке). Так как эпюра $Q_y$ на рассматриваемом участке не пересекает ось, то есть эпюра $M_x$ не имеет экстремума на этом участке, то в качестве третьей точки принимается любая точка участка, обычно середина.

$M_X(0) = 0$.  $M_X(\ell_1 = 1{,}2) = 40{,}641\cdot 1{,}2 - 0{,}5\cdot 6\cdot 1{,}2^2 = 44{,}451$кНм .

$M_X(\ell_1/2 = 0{,}6) = 40{,}641\cdot 0{,}6 - 0{,}5\cdot 6\cdot 0{,}6^2 = 23{,}305$кНм

По найденным значениям $M_x(z_1)$ в трёх точках строим эпюру $M_x$ на участке I (см. рис. 8).

Проводим сечение в пределах участка II (см. рис. 8), совместив начало отсчета с началом участка II.

Участок II (см. рис. 9): $0 \le z_2 \le \ell_3-\ell_1-\ell_2 = 3$ м.

$\sum F_y = 0$ $R_A-q\ell_1-F-Q_Y(z_2)= 0$, откуда $Q_Y(z_2)= R_A-q\ell_1-F = -6{,}559$ кН.

Строим эпюру $Q_Y$ на участке II.

$\sum m_{O_2} = 0$ $q\ell_1(0{,}5\ell_1+z_2)-R_A(\ell_1+z_2)+Fz_2+M_X(z_2) = 0$,

откуда $M_X(z_2) = - q\ell_1(0{,}5\ell_1+z_2)+R_A(\ell_1+z_2)-Fz_2$.

Зависимость $M_x(z_2)$ линейная, и для построения эпюры $M_x$ на втором участке находим две точки:

$M_X(0)=44{,}45$ кНм. $M_X(3)=-6\cdot1{,}2(0{,}5\cdot1{,}2+3)+40{,}641(1{,}2+3)-40\cdot3=24{,}773$ кНм.

Строим эпюру $M_X$ на участке II.

Участок III проще рассматривать справа, отбрасывая левую часть балки (см. рис. 9).

Участок III $0 \le z_3 \le \ell_2 = 2{,}1$ м

$\sum F_y = 0$. $Q_Y(z_3)+R_B = 0$, откуда $Q_Y(z_3) = -R_B = -6{,}559$ кН.

Строим эпюру $Q_Y$ на участке III.

$\sum m_{O_3} = 0$ $R_Bz_3-M_X(z_3) = 0$, откуда $M_X(z_4) = R_Bz_3$.

Зависимость $M_x(z_3)$ линейная, поэтому эпюру $M_x$ на участке III представляем прямой линией, проведенной через две точки (см. рис. 8).

$M_X(0) = 0$. $M_X(\ell_2) = 13{,}773$ кНм.

Строим эпюру $M_X$ на участке III.

Подберем поперечные сечения балки в виде круга, квадрата, двутавра и двух швеллеров. Поперечные сечения балки подбираются из условия прочности по нормальным напряжениям, которое имеет следующий вид:

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{max}|}{W_x} \le [\sigma],$$

где $M_{max}$– максимальный изгибающий момент в Нм (по эпюре $M_x$ находим, что $|M_{x\,max}| = 44{,}451$ кНм=44451 Нм); $W_x$ – осевой момент сопротивления поперечного сечения в м$^3$; $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение в Па ($[\sigma] = 160$ МПа $= 160 \cdot 10^6$ Па).

Из этого соотношения можно найти требуемый осевой момент сопротивления сечения равен $W_X^{ТР} = \frac{|M_{X\,max}|}{[\sigma]} = \frac{44451}{160 \cdot 10^6} = 277{,}8 \cdot 10^{-6}\,м^3$ =277,8 см$^3$.

Подберём круглое поперечное сечение.

Осевой момент сопротивления круга $W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0{,}1 \cdot d^3$.

Откуда диаметр поперечного сечения балки $d = \sqrt[3]{\frac{W_X^{ТР}}{0.1}} = \sqrt[3]{\frac{277{,}8}{0{,}1}}$ =14,058 см.

Площадь круга $A_{кр} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 155{,}1$ см$^2$.

Подберём квадратное поперечное сечение.

Осевой момент сопротивления квадрата $W_x = \frac{b^3}{6}$.

Откуда сторона квадрата поперечного сечения балки

$b = \sqrt[3]{6 \cdot W_X^{ТР}} = \sqrt[3]{277{,}8}$ =11,86 см. Площадь квадрата $A_{КВ} = b^2$ =140,6 см$^2$.

Подберём двутавровое поперечное сечение балки.

По сортаменту (ГОСТ 8239-89) выбираем двутавр № 22 с осевым моментом сопротивления $W_x$ = 232 см$^3$ меньшим, чем требуемый.

Проверяем осевой момент сопротивления принятого сечения на процент расхождения с требуемым осевым моментом сопротивления

$$\frac{|W_X^{ТР} - W_X^{ДВ}|}{W_X^{ТР}} 100\% = \frac{277{,}8 - 232}{277{,}8} 100\% = 16{,}48\ \%.$$

Полученный процент расхождения 16,48 % больше допускаемого 5%, следовательно, двутавр № 22 не подходит.

Принимаем двутавр № 24 с осевым моментом сопротивления $W_x$ = 289 см$^3$ и площадью поперечного сечения $A_{дв}$ = 34,8 см$^2$. Этот двутавр на процент расхождения не проверяем.

Подберём поперечное сечение балки, состоящее из двух швеллеров. Требуемый момент сопротивления одного швеллера

$W^{ШВ} = 0{,}5\ W^{ТР} = 0{,}5 \cdot 277{,}8 = 138{,}9$ см$^3$.

По сортаменту (ГОСТ 8240-97) выбираем швеллер № 18а с осевым моментом сопротивления $W_x$ = 132 см$^3$. Проверяем принятое сечение на процент расхождения с требуемым осевым моментом сопротивления

$$\frac{|W_X^{ТР} - W_X^{ШВ}|}{W_X^{ТР}} 100\% = \frac{138{,}9 - 132}{138{,}9} 100\% = 4{,}9\ \%.$$

Полученный процент расхождения 4,9% меньше допускаемого 5 %, следовательно, швеллер № 18а подходит. Принимаем швеллер № 18а с $W_x$ = 132 см$^3$ и $A_{дв}$ = 22,2 см$^2$.

Площадь поперечного сечения двух швеллеров $A_{2шв}$ = 22,2·2 = 44,4 см$^2$

Сравним принятые сечения балок по экономичности. Так как $A_{дв} < A_{2шв} < A_{кв} < A_{кр}$, следовательно, двутавровое поперечное сечение балки наиболее экономичное.

## РАСЧЕТ БАЛКИ-КОНСОЛИ НА ИЗГИБ

Для стальной балки требуется:

Для стальной балки, изображенной на рис. 8, требуется:

1. Построить эпюры поперечной силы $Q_y$ и изгибающего момента $M_X$.
2. Подобрать из условия прочности по допускаемым напряжениям сложное поперечное сечение балки.

Принять: $F = F_1$, $m = m_1$, $[\sigma] = 160$ МПа.

Расчет проведен для: $\ell_1$=2 м, $\ell_2$ =2,5 м, $\ell_3$ =6,3 м,

$F = F_1 = 10$ кН, $m = m_1 = 15$ кНм, $q = 14$ кНм.

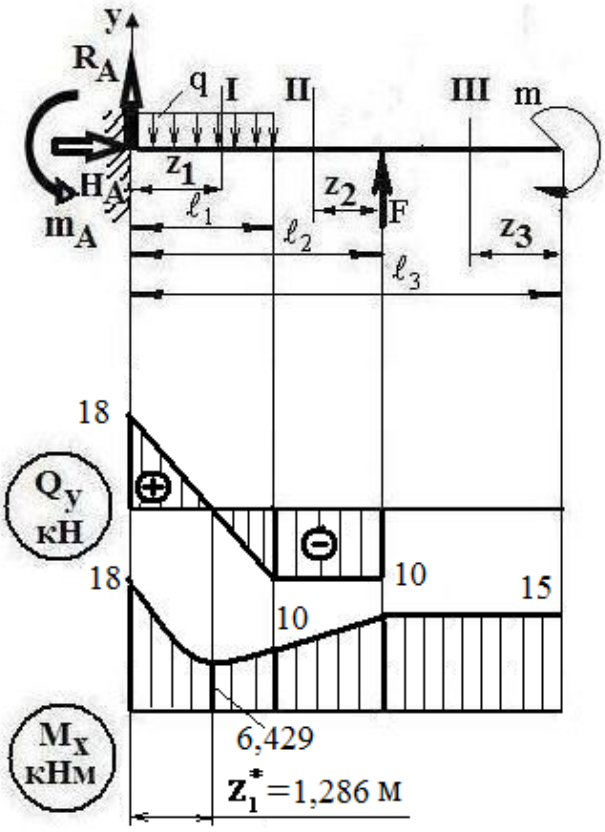


Рис. 10

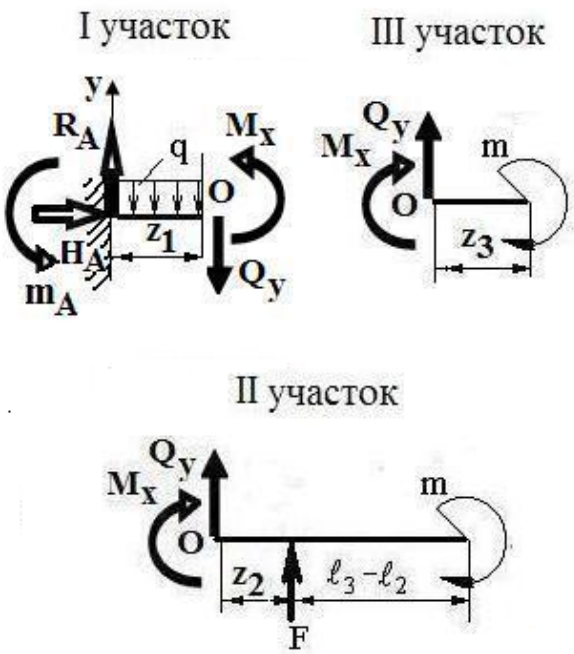


Рис. 11

Определим опорные реакции. В жестком зашемлении А возникают три реакции – вертикальная $R_A$, горизонтальная $H_A$ и момент $m_A$. Для определения трёх неизвестных реакций имеем три уравнения равновесия:

$\sum F_Z = 0$; $H_A = 0$.

$\sum F_Y = 0$; $R_A - q\ell_1 + F = 0$;

$R_A = q\ell_1 - F = 14 \cdot 2 - 10 = 18$ кН.

$\sum m_A = 0$;  $m_A$ - $q\ell_1 \cdot 0{,}5\ell_1$ - m + $F\ell_2$ = 0.

$m_A = q\ell_1 \cdot 0{,}5\ell_1 + m - F\ell_2 = 14 \cdot 2 \cdot 0{,}5 \cdot 2 + 15 - 10 \cdot 2{,}5 = 18$ кНм.

Для проверки правильности нахождения реакций используем уравнение $\sum m_B = 0$.  $m_A - R_A\ell_3 + q\ell_1 \cdot (\ell_3 - 0{,}5\ell_1) - F \cdot (\ell_3 - \ell_2) - m =$

$= 18 - 18 \cdot 6{,}3 + 14 \cdot 2 \cdot (6{,}3 - 0{,}5 \cdot 2) - 10 \cdot (6{,}3 - 2{,}5) - 15 = 0$.

Опорные реакции найдены верно.

Разбиваем конструкцию балки на участки I, II, III и используем метод сечений.

Найдем значения поперечных сил $Q_Y(z)$ и изгибающих моментов $M_X(z)$ на участках балки и построим их эпюры.

Проводим сечение 1-1в пределах участка I (см. рис 11). $0 \le z_1 \le \ell_1 = 2$ м.

Отбрасываем правую часть балки и рассматриваем равновесие оставшейся левой части балки (см. рис 11).

$\sum F_Y = 0$  $R_A - qz_1 - Q_Y(z_1) = 0$,  откуда  $Q_Y(z_1) = R_A - qz_1$.

$Q_Y(0) = R_A = 18$ кН.  $Q_Y(\ell_1) = Q_Y(2) = = R_A - q \cdot 2 = 18 - 14 \cdot 2 = -10$ кН.

Строим эпюру $Q_y(z_1)$ на участке I

$\sum m_{O_1} = 0$  $m_A + q\, z_1 \cdot 0{,}5z_1 - R_A\, z_1 + M_X(z_1) = 0$,

откуда  $M_X(z_1) = -m_A - q\, z_1 \cdot 0{,}5z_1 + R_A\, z_1 = -m_A - 0{,}5q\, z_1^2 + R_A\, z_1$.

Это парабола, для построения которой необходимо иметь, как минимум, значения функции $M_x(z_1)$ в трёх точках(в двух граничных точках участка и в какой-либо третьей точке). Если эпюра $Q_y$ пересекает ось, как это имеет место на участке I, то в качестве третьей точки выбирается координата $z_1^*$ сечения, в котором $M_x(z_1)$ имеет экстремум (так как $Q_y(z_1)$ меняет знак с + на –, то это будет максимум). Координату $z_1^*$ определим, приравнивая выражение для $Q_y(z_1)$ нулю при $z_1 = z_1^*$:

$$Q_y(z_1) = R_A - qz_1^* = 0, \quad z_1^* = \frac{R_A}{q} = \frac{18}{14} = 1{,}286 \text{ м.}$$

Определяем значение $M_x(z_1)$ в двух граничных точках участка

$M_X(0) = -m_A = -18$ кНм.

$M_X(\ell_1) = M_X(2) = -m_A - 0{,}5 \cdot q \cdot 2^2 + R_A \cdot 2 = -18 - 0{,}5 \cdot 14 \cdot 2^2 + 18 \cdot 2 = -10$ кНм.

Определяем значение $M_x(z_1)$ в третьей точке при $z_1^* = 1{,}286$ м

$M_x(z_1 = 1{,}286 \text{ м}) = -18 + 18 \cdot 1{,}286 - 0{,}5 \cdot 14 \cdot 1{,}286^2 = -6{,}429$ кНм.

По найденным значениям $M_x(z_1)$ в трёх точках строим эпюру $M_x$ на участке I (см. рис. 10).

Проводим сечение в пределах участка II, совместив начало отсчета с началом участка II.  $0 \le z_2 \le \ell_2 - \ell_1 = 0{,}5$ м.

Отбрасываем левую часть балки и рассматриваем равновесие оставшейся правой части балки (см. рис. 11).

$\sum F_Y = 0$ $F + Q_Y(z_2)=0$, откуда $Q_Y(z_2)= - F = -10$ кН.

Строим эпюру $Q_y(z_2)$ на участке II (см. рис. 10).

$\sum m_{O_2} = 0$. $Fz_2 - m - M_X(z_2) = 0$, откуда $M_X(z_2) = F z_2 - m$.

Определяем значение $M_x(z_2)$ в двух граничных точках участка

$M_X(0) = - m = -10$ кНм. $M_X(0,5) = F \cdot 0,5 - m = 10 \cdot 0,5 - 15 = -10$ кНм.

Строим эпюру $M_x(z_2)$ на участке II (см. рис. 10).

Рассмотрим участок III $0 \le z_3 \le \ell_3 - \ell_2 = 3,8$ м.

Отбрасываем левую часть балки и рассматриваем равновесие оставшейся правой части балки (см. рис. 11). $\sum F_Y = 0$ $Q_Y(z_3)=0$.

Строим эпюру $Q_y$ на участке III (см. рис. 10).

$\sum m_{O_3} = 0$ $- m - M_X(z_3) = 0$, откуда $M_X(z_3) = - m = -15$ кНм.

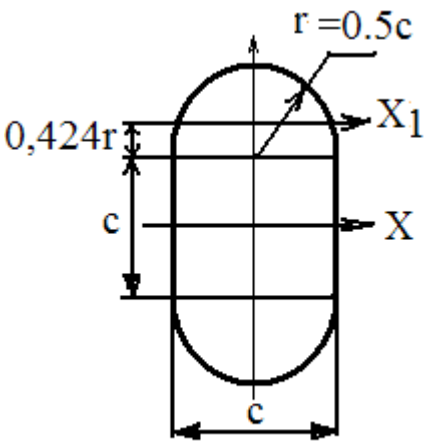

Рис. 12

Строим эпюру $M_x$ на участке III (см. рис. 10).

Подберем размеры сложного поперечного сечения в виде сложной фигуры. (рис. 12). Требуемый из условия прочности по нормальным напряжениям осевой момент сопротивления сечения балки находится по формуле (см. предудущую задачу)

$$W_X^{ТР} = \frac{|M_{X\max}|}{[\sigma]} = \frac{18 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 112,5 \cdot 10^{-6} м^3 = 112,5 см^3.$$

Разобьем сложную фигуру на простейшие плоские фигуры – прямоугольник и два полукруга, центры тяжести которых известны. Тогда $J_X^{СЛ}$ – осевой момент инерции сложной фигуры равен

$$J_X = J_X^{ПР} + 2J_X^{ПОЛУКР} = \frac{bh^3}{12} + 2(0,11r^4 + \frac{\pi r^2}{2}(\frac{c}{2} + 0,424r)^2) =$$

$$= \frac{c^4}{12} + 2(0,11(\frac{c}{2})^4 + \frac{\pi}{2}(\frac{c}{2})^2(\frac{c}{2} + 0,424(\frac{c}{2}))^2) = 0,495c^4.$$

Здесь: $\frac{bh^3}{12} = \frac{cc^3}{12}$ - момент инерции прямоугольника относительно центральной оси всей фигуры X; $0.11r^4 = 0.11(0.5c)^4$ - момент инерции полукруга относительно своей центральной оси $X_1$ (рис. 12,б); $\frac{c}{2} + 0,424r = \frac{c}{2} + 0.424(0.5c)$ - расстояние между центральной осью полукруга $X_1$ и центральной осью X всей фигуры; $\frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi(0.5c)^2}{2}$ - площадь полукруга.

Момент сопротивления сложной фигуры $W_x^{сл} = \frac{J_x^{сл}}{|y_{max}|} = \frac{0{,}495c^4}{c} = 0{,}495c^3$,

где $y_{мах}$=c – расстояние от нейтральной оси сложного сечения до самого удаленного волокна в сечении.

Приравняем $W_X^{ТР} = W_X^{СЛ}$. $112{,}5 = 0{,}495c^3$, откуда $c = 6{,}103$ см.

## РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННО ЛОМАНОГО БРУСА

Для изображенного в аксонометрии ломаного стержня круглого поперечного сечения (рис. 13), расположенного в горизонтальной плоскости и имеющего прямые углы в точках А и В, на который действует вертикальная нагрузка $F_1$ и q, требуется:

1) построить отдельно (в аксонометрии) эпюры изгибающих и крутящих моментов;

2) установить опасное сечение и найти для него величину расчетного момента по энергетическому критерию.

Расчет проведен для: $\ell_1$=1,4 м, $\ell_2$ =2,3 м, $F = F_1$ = 10 кН, q = 14 кНм.

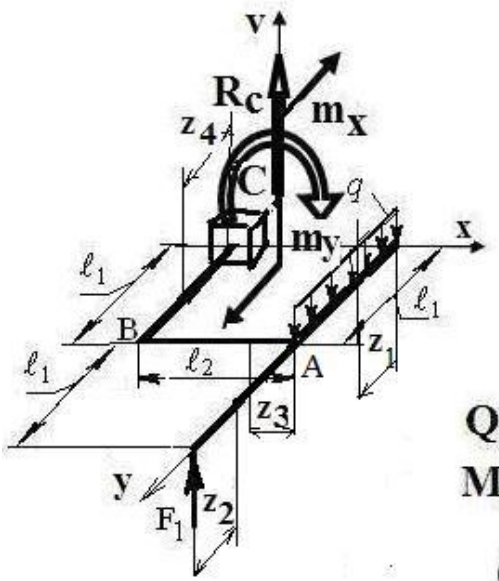


Рис. 13

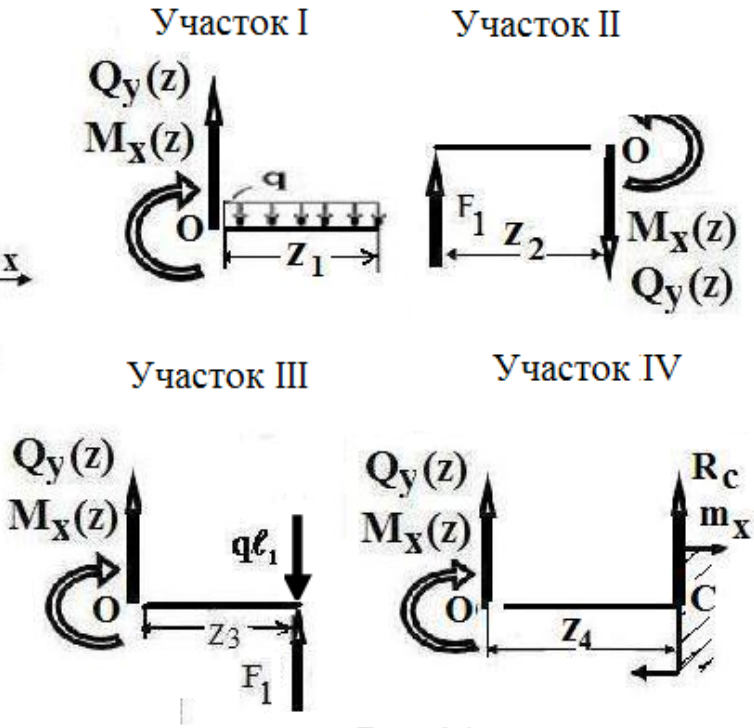


Рис. 14

Проведем произвольные оси X , У и V.

Обозначим реакции В жесткой заделке - опоре С возникают три реакции: вертикальная реакция $R_C$, реактивный момент в плоскости VOX – $m_Y$ и реактивный момент в плоскости VOY – $m_X$.

Для определения реакций в опоре С запишем уравнения равновесия статики.

$\sum F_V = 0$;  $R_C - q\cdot\ell_1 + F_1 = 0$,  откуда  $R_C = q\cdot\ell_1 - F_1 = 9{,}6$ кН.

$\sum m_X = 0$  $F_1\cdot 2\cdot\ell_1 - q\cdot\ell_1\cdot 0{,}5\cdot\ell_1 - m_X = 0$,

откуда $m_X = -F_1\cdot 2\cdot\ell_1 + q\cdot\ell_1\cdot 0{,}5\cdot\ell_1 = -14{,}3$ кНм.

$\sum m_Y = 0$  $F_1\cdot\ell_2 - q\cdot\ell_1\cdot\ell_2 - m_Y = 0$,  откуда $m_Y = F_1\cdot\ell_2 - q\cdot\ell_1\cdot\ell_2 = -22{,}1$ кНм.

Делим стержень на участки и используем метод сечений.

Проводим сечение 1-1 в пределах участка I (рис. 14) $0 \le z_1 \le \ell_1$.

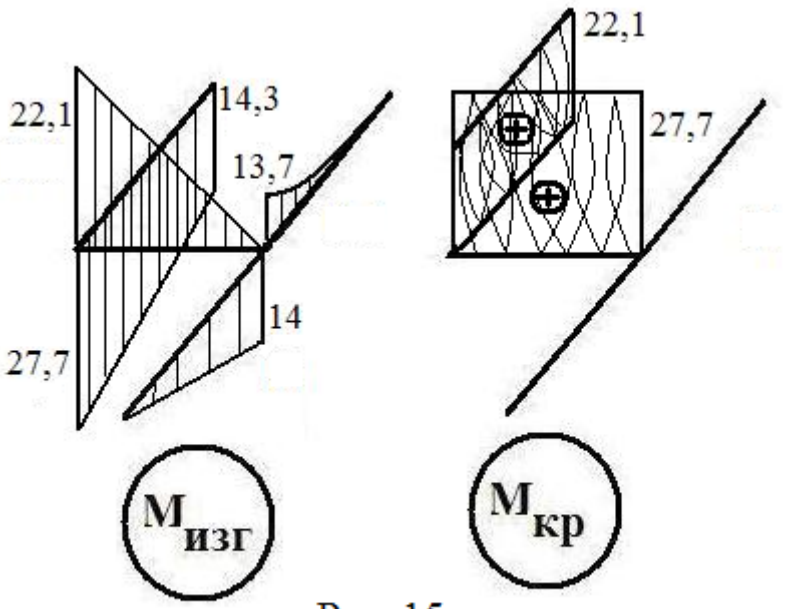

Рис. 15

Записываем уравнение равновесия статики

$\sum m_{O_1} = 0$

$-qz_1 0{,}5z_1 - M_X(z_1) = 0$,

откуда $M_X(z_1) = -0{,}5qz_1^2$.

Находим значения момента на границах участка

$M_X(0) = 0$

$M_X(\ell_1) = -13{,}7$ кНм.

Строим эпюру $M_x$ на участке I.

Проводим сечение на участке II (рис. 14), совместив начало отсчета с началом участка II.

Участок II  $0 \le z_2 \le \ell_1$.  Записываем уравнение равновесия статики.

$\sum m_{O_2} = 0$  $-Fz_2 + M_X(z_2) = 0$,  откуда  $M_X(z_2) = Fz_2$.

Находим значения момента на границах участка

$M_X(0) = 0$.  $M_X(\ell_1) = 14$ кНм.

Строим эпюру $M_x$ на участке II.

Перенесем силы $F_1$ и $q\ell_1$ в точку А. Проводим сечение на участке III (рис. 14), совместив начало отсчета с началом участка III - точкой А.

Участок III  $0 \le z_3 \le \ell_2$  Записываем уравнение равновесия статики

$\sum m_{O_3} = 0$ $\quad Fz_3 - q\ell_1 z_3 - M_X(z_3) = 0$, откуда $M_X(z_3) = (F - q\ell_1)\, z_3$.

Находим значения момента на границах участка

$M_X(0) = 0$. $M_X(\ell_2) = -22{,}08$ кНм.

Строим эпюру $M_x$ на участке III.

Крутящий момент на участке III будет равен

$M_K = m = F_1\ell_1 + q\ell_1\, 0{,}5\ell_1 = 27{,}7$ кНм.

Строим эпюру $M_K$ на участке III.

Участок IV удобно рассматривать, совместив его начало с опорой С (рис. 14).

Участок IV $0 \le z_4 \le \ell_1$. Записываем уравнение равновесия статики.

$\sum m_{O_4} = 0$ $\quad - m_X + R_C z_4 - M_X(z_4) = 0$, откуда $M_X(z_4) = -m_X + R_C z_4$.

Находим значения момента на границах участка

$M_X(0) = 14{,}3$ кНм. $M_X(\ell_1) = 27{,}7$ кНм.

Строим эпюру $M_x$ на участке IV.

Крутящий момент на участке IV будет равен

$M_K = -\ m_У = -F_1\,\ell_2 + q\,\ell_1\,\ell_2 = 22{,}1$ кНм.

Строим эпюру $M_K$ на участке IV.

Анализируем построенные эпюры $M_x$ и $M_K$.

Найдем опасное сечение стержня – такое, в котором значения изгибающего и крутящего моментов либо одновременно, либо по одиночке максимальны.

Это сечение - В.

Найдем для него величину расчетного момента по энергетическому критерию:

$$M_{РАСЧ\ IV} = \sqrt{M_X^2 + 0{,}75 \cdot M_K^2} = \sqrt{27{,}72^2 + 0{,}75 \cdot 22{,}08^2} = 33{,}676 \text{ кНм.}$$

## РАСЧЕТ ВАЛА НА ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ

Шкив диаметром $D_1$ и углом наклона ветвей ремня к оси x - $\alpha_1$ делает n оборотов в минуту и передает мощность N кВт. Два других шкива имеют одинаковый диаметр $D_2$ и одинаковые углы наклона ветвей ремня к оси x - $\alpha_2$. Каждый из них передает мощность N/2 (рис. 16,а). Требуется:

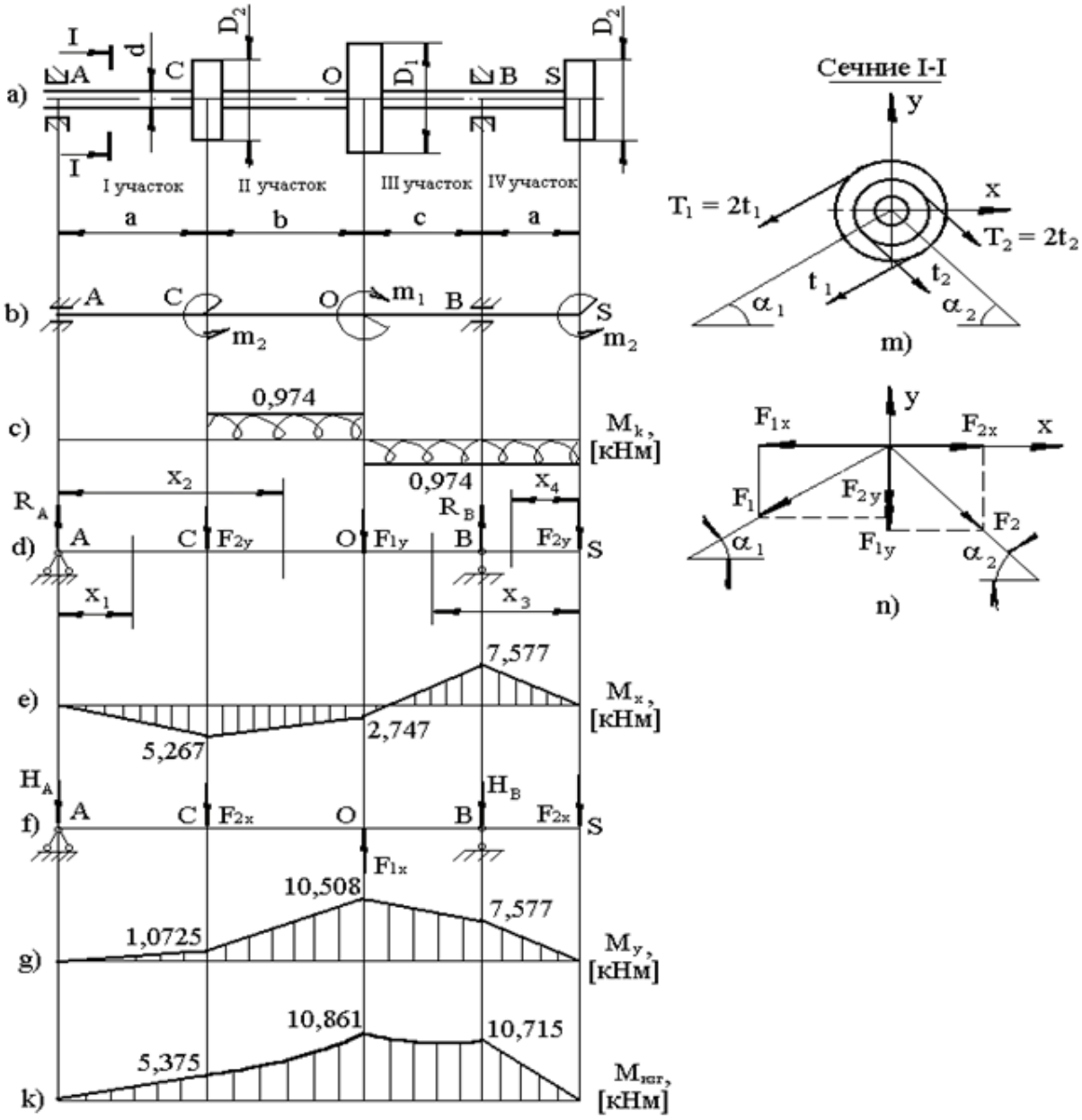


Рис. 16

- определить моменты, приложенные к шкивам, по заданным N и n;
- построить эпюру крутящих моментов $M_к$;
- определить окружные усилия $t_1$ и $t_2$, действующие на шкивы, по найденным моментам и заданным диаметрам шкивов $D_1$ и $D_2$;
- определить давления на вал, принимая их равными трем окружным усилиям;
- определить силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях (вес шкивов и вала не учитывать);
- построить эпюры моментов от вертикальных ($M_x$) и горизонтальных ($M_y$) сил;
- построить эпюру суммарных изгибающих моментов ($M_{изг}$);

- найти опасное сечение и определить максимальный расчетный момент по критерию наибольших касательных напряжений;
- подобрать диаметр вала d при заданном допускаемом напряжении [σ].

Расчет проведен для: N = 100 кВт; n = 500 об/мин; a = 1,1 м; b = 1,2 м; c = 1,3 м; $D_1$ = 1,0 м; $D_2$ = 0,6 м; $\alpha_1$ = 30°; $\alpha_2$ = 45°; [σ] = 70 МПа.

1. Определяем моменты, приложенные к шкивам, по заданным N и n:

$$m_1 = 9{,}736\frac{N}{n} = 9{,}736\frac{100}{500} = 1{,}947\ \text{кН}\cdot\text{м};$$

$$m_2 = 9{,}736\frac{N}{2n} = 9{,}736\frac{100}{2\cdot 500} = 0{,}9736\ \text{кН}\cdot\text{м}.$$

Расчетная схема вала на кручение изображена на рис. 2в.

2. Для построения эпюры крутящих моментов используем метод сечений. Вал имеет четыре участка (рис. 16,а).

Для участка I: $M_{к1} = 0$.

Для участка II: $M_{к2} = m_2 = 0{,}974\ \text{кН}\cdot\text{м}$.

Для участков III и IV:

$$M_{к3} = M_{к4} = m_2 - m_1 = 0{,}974 - 1{,}947 = -0{,}974\ \text{кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюра крутящих моментов $M_к$ приведена на рис. 16,с.

3. Определяем окружные усилия $t_1$ и $t_2$, действующие на шкивы:

$$t_1 = \frac{2m_1}{D_1} = \frac{2\cdot 1{,}947}{1} = 3{,}894\ \text{кН}; \qquad t_2 = \frac{2m_2}{D_2} = \frac{2\cdot 0{,}974}{0{,}6} = 3{,}247\ \text{кН}.$$

где $D_1$ и $D_2$ – диаметры первого и второго шкивов.

4. Находим давления на вал (принимаем их равными трем окружным усилиям):

$$F_1 = 3t_1 = 3\cdot 3{,}894 = 11{,}682\ \text{кН}; \qquad F_2 = 3t_2 = 3\cdot 3{,}247 = 9{,}741\ \text{кН}.$$

5. Определяем силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях. Для этого разложим силы $F_1$ и $F_2$ на горизонтальную и вертикальную составляющие:

$$F_{1x} = F_1\cdot\cos\alpha_1 = 11{,}682\cdot\cos 30° = 10{,}117\ \text{кН};$$

$$F_{2x} = F_2\cdot\cos\alpha_2 = 9{,}741\cdot\cos 45° = 6{,}888\ \text{кН};$$

$$F_{1y} = F_1\cdot\sin\alpha_1 = 11{,}682\cdot\sin 30° = 5{,}841\ \text{кН};$$

$$F_{2y} = F_2\cdot\sin\alpha_2 = 9{,}741\cdot\sin 45° = 6{,}888\ \text{кН}.$$

При этом нагрузки $F_{1x}$ и $F_{2x}$ направлены в противоположные стороны (см. рис. 16,n).

6. Прикладываем к валу силы $F_{1y}$ и $F_{2y}$, изгибающие его в вертикальной плоскости (рис. 16,d), и находим опорные реакции $R_A$ и $R_B$ из уравнений равновесия статики:

$$\sum m_B = 0; \quad -R_A(a+b+c) + F_{2y}(b+c) + F_{1y}\cdot c - F_{2y}\cdot a = 0;$$

$$-3{,}6R_A + 6{,}888\cdot 2{,}5 + 5{,}841\cdot 1{,}3 - 6{,}888\cdot 1{,}1 = 0; \qquad R_A = 4{,}788\ \text{кН}.$$

$$\sum m_A = 0; \quad -F_{2y}a - F_{1y}(a+b) + R_B(a+b+c) - F_{2y}(2a+b+c) = 0;$$

$$-6{,}888 \cdot 1{,}1 - 5{,}841 \cdot 2{,}3 + R_B \cdot 3{,}6 - 6{,}888 \cdot 4{,}7 = 0; \quad R_B = 14{,}829 \text{ кН}.$$

Проверка: $\sum F_y = 0; \quad R_A + R_B - 2F_{2y} - F_{1y} = 0;$

$$4{,}788 + 14{,}829 - 2 \cdot 6{,}888 - 5{,}841 = 0; \quad 0 \equiv 0.$$

Определяем изгибающие моменты от вертикальных сил.

I участок $(0 \le x_1 \le 1{,}1 \text{ м})$ $M_{x1} = R_A x_1 = 4{,}788x_1;$

$$x_1 = 0 \quad M_{x1} = 0; \quad x_1 = 1{,}1 \text{ м} \quad M_{x1} = 4{,}788 \cdot 1{,}1 = 5{,}267 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

II участок $(1{,}1 \le y_2 \le 2{,}3 \text{ м})$

$$M_{x2} = R_A x_2 - F_{2y}(x_2 - 1{,}1) = 4{,}788x_2 - 6{,}888(x_2 - 1{,}1);$$

$$x_2 = 1{,}1 \text{ м} \quad M_{x2} = 5{,}267 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad x_2 = 2{,}3 \text{ м} \quad M_{x2} = 2{,}747 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

III участок $(1{,}1 \le y_3 \le 2{,}4 \text{ м})$

$$M_{x3} = -F_{2y} \cdot x_3 + R_B(x_3 - 1{,}1) = -6{,}888x_3 + 14{,}829(x_3 - 1{,}1);$$

$$x_3 = 1{,}1 \text{ м} \quad M_{x3} = -7{,}577 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad x_3 = 2{,}4 \text{ м} \quad M_{x3} = 2{,}747 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

IV участок $(0 \le y_4 \le 1{,}1 \text{ м})$ $M_{x4} = -F_{2y} \cdot x_4 = -6{,}888x_4;$

$$x_4 = 0 \quad M_{x4} = 0; \quad x_4 = 1{,}1 \text{ м} \quad M_{x4} = -7{,}577 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Строим эпюру $M_x$ ($M_{верт}$) (рис. 16,g).

7. Прикладываем к валу нагрузки $F_{1x}$ и $F_{2x}$, изгибающие его в горизонтальной плоскости, при этом изображение вала с приложенными нагрузками поворачиваем из горизонтальной плоскости в вертикальную и располагаем в плоскости чертежа (рис. 16,f). Находим опорные реакции $H_A$ и $H_B$ из уравнений равновесия статики.

$$\sum m_B = 0; \quad H_A(a+b+c) + F_{2x}(b+c) - F_{1x} \cdot c - F_{2x} \cdot a = 0;$$

$$3{,}6H_A + 6{,}888 \cdot 2{,}5 - 10{,}117 \cdot 1{,}3 - 6{,}888 \cdot 1{,}1 = 0; \qquad H_A = 0{,}975 \text{ кН}.$$

$$\sum m_A = 0; \quad -F_{2x}a + F_{1x}(a+b) - H_B(a+b+c) - F_{2x}(2a+b+c) = 0;$$

$$-6{,}888 \cdot 1{,}1 + 10{,}117 \cdot 2{,}3 - H_B \cdot 3{,}6 - 6{,}888 \cdot 4{,}7 = 0; \quad H_B = -4{,}634 \text{ кН}.$$

Проверка: $\sum F_x = 0; \quad -H_A - H_B - 2F_{2x} + F_{1x} = 0;$

$$-0{,}975 + 4{,}634 - 2 \cdot 6{,}888 + 10{,}117 = 0; \quad 0 \equiv 0.$$

Записываем выражения изгибающих моментов $M_y$ ($M_{гор}$) на каждом участке:

I участок $(0 \le y_1 \le 1{,}1 \text{ м})$ $M_{y1} = -H_A y_1 = -0{,}975y_1;$

$$y_1 = 0 \quad M_{y1} = 0; \quad y_1 = 1{,}1 \text{ м} \quad M_{y1} = -0{,}975 \cdot 1{,}1 = -1{,}0725 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

II участок $(1{,}1 \le y_2 \le 2{,}3 \text{ м})$

$$M_{y2} = -H_A y_2 - F_{2x}(y_2 - 1{,}1) = -0{,}975y_2 - 6{,}888(y_2 - 1{,}1);$$

$$y_2 = 1{,}1 \text{ м} \quad M_{y2} = -1{,}0725 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad y_2 = 2{,}3 \text{ м} \quad M_{y2} = -10{,}508 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

III участок $(1{,}1 \le y_3 \le 2{,}4 \text{ м})$

$$M_{y3} = -F_{2x} \cdot y_3 - H_B(y_3 - 1{,}1) = -6{,}888y_3 + 4{,}634(y_3 - 1{,}1);$$

$$y_3 = 1{,}1\ м \quad M_{y3} = -7{,}577\ кН \cdot м; \quad y_3 = 2{,}4\ м \quad M_{y3} = -10{,}508\ кН \cdot м.$$

IV участок $(0 \le y_4 \le 1{,}1\ м)$ $M_{y4} = -F_{2x} \cdot y_4 = -6{,}888 y_4$;

$$y_4 = 0 \quad M_{y4} = 0; \quad y_4 = 1{,}1\ м \quad M_{y4} = -7{,}577\ кН \cdot м.$$

Строим эпюру $M_y$ ($M_{гор}$) (рис. 16,g).

8. Определяем суммарные изгибающие моменты в граничных сечениях участков по формуле $M_{изг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$.

$M_{изг(A)} = 0$;

$M_{изг(C)} = \sqrt{5{,}267^2 + (-1{,}073)^2} = 5{,}375\ кН \cdot м$;

$M_{изг(O)} = \sqrt{2{,}747^2 + (-10{,}508)^2} = 10{,}861\ кН \cdot м$;

$M_{изг(B)} = \sqrt{-7{,}577^2 + (-7{,}577)^2} = 10{,}715\ кН \cdot м$;

$M_{изг(S)} = 0$;

Строим эпюру суммарных изгибающих моментов $M_{изг}$ (рис. 16,к).

Для каждого поперечного сечения вала имеется своя плоскость действия суммарного изгибающего момента, но для круглого сечения можно совместить плоскости $M_{изг}$ для всех поперечных сечений и построить суммарную эпюру в плоскости чертежа. Эта эпюра будет прямолинейной только для тех участков, на которых эпюры $M_x$ и $M_y$ пересекают ось в одной точке (I и IV участки). На других участках эпюра $M_{изг}$ будет криволинейной.

9. Опасным сечением является сечение О.

Расчетный момент по третьей теории прочности для этого сечения

$$M_{расч.max} = \sqrt{M_{изг}^2 + M_к^2} = \sqrt{10{,}861^2 + 0{,}974^2} = 10{,}904\ кН \cdot м.$$

10. Определяем диаметр вала d из условия прочности:

$$\frac{M_{расч.max}}{W_x} \le [\sigma]; \qquad W_x = \frac{\pi d^3}{32}; \qquad \frac{10{,}904 \cdot 32}{3{,}14 d^3} \le 70 \cdot 10^3;$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{10{,}904 \cdot 32}{3{,}14 \cdot 70 \cdot 10^3}} = 0{,}117\ м.$$

Округляя, принимаем диаметр вала d = 120 мм.

## РАСЧЕТ СТЕРЖНЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Стальной стержень (рис. 17,а) длиной $\ell = 0{,}84$ м сжимается силой F = 140 кН. Требуется:

- определить размеры поперечного сечения (рис. 17,б) стержня при допускаемом напряжении на простое сжатие [σ] = 160 МПа;

- найти критическую силу и коэффициент запаса устойчивость.

1. Определяем геометрические характеристики поперечного сечения стержня.

Площадь $A = A_{КВАДРАТА} - 2A_{КРУГА} = 3c \times 3c - 2\frac{\pi c^2}{4} = 7{,}43c^2$, откуда $c = \sqrt{\frac{A}{7{,}43}}$.

Главные центральные моменты инерции поперечного сечения стержня

$$J_X = J_X^{КВ} - 2J_X^{КР} = \frac{bh^3}{12} - 2(0{,}05d^4 + \frac{\pi d^2}{4}(0{,}75c)^2) == \frac{3c(3c)^3}{12} - 2(0{,}05c^4 + \frac{\pi}{4}c^2(0{,}5625c^2) = 5{,}7669c^4$$

$$J_Y = J_Y^{КВ} - 2J_Y^{КРУГА} = \frac{b^3h}{12} - 2\frac{\pi d^4}{64} = 6{,}75c^4 - 2 \times 0{,}05c^4 = 6{,}65c^4.$$

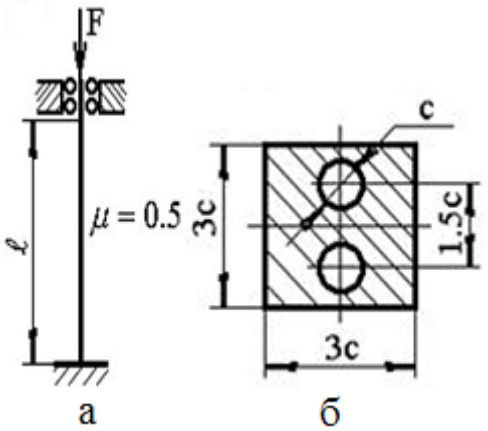

Рис. 17

Минимальный главный центральный момент инерции $J_{MIN} = J_X = 5{,}7669c^4$.

Минимальный радиус инерции

$$i_{MIN} = \sqrt{\frac{J_{MIN}}{A}} = \sqrt{\frac{5{,}7669c^4}{7{,}43c^2}} = 0{,}881c.$$

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu\ell}{i_{min}} = \frac{0{,}5 \cdot 84}{0{,}881 \cdot c} = \frac{47{,}7}{c},$$

здесь μ=0,5 - коэффициент приведения длины для данного стержня.

2. Подбор поперечного сечения стержня проводим последовательными приближениями.

<u>Первое приближение.</u> В первом приближении задаем $\varphi_1 = 0{,}5$.

Площадь сечения $A_1 = \frac{F}{\varphi_1[\sigma]} = \frac{140 \cdot 10^3}{0{,}5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 1{,}75 \cdot 10^{-3} м^2 = 17{,}5см^2$

Находим $c_1 = \sqrt{\frac{A_1}{7{,}43}} = \sqrt{\frac{17{,}5}{7{,}43}} = 1{,}53см$. Гибкость $\lambda_1 = \frac{47{,}7}{c} = \frac{47{,}7}{1{,}53} = 31$.

Представим число $\lambda_1 = 31$ как 30+1. По таблице коэффициентов продольного изгиба φ для стали марки Ст.3 в приложении к учебному пособию по «Сопротивлению материалов» http://techn.sstu.ru/new/SubjectFGOS/Default.aspx?kod=115&tip=4 находим $\varphi_1^{табл}$, соответствующее гибкости $\lambda_1$ =31.

при λ = 30 φ = 0,94

при λ = 40 φ = 0,92

Δλ = 10 Δφ = -0,02

Для Δλ = 1 Δφ = -0,002

Тогда $\varphi_1^{табл}(\lambda = 31) = \varphi(\lambda = 30) + (31 - 30) \cdot \Delta\varphi = 0{,}94 + 1 \cdot (-0{,}002) = 0{,}938$

Напряжения, действующие в стержне $\sigma = \frac{F}{A_1} = \frac{140 \cdot 10^3}{1{,}75 \cdot 10^{-3}} = 80 \cdot 10^6\,\text{Па} = 80\text{МПа}$.

Допускаемое напряжение на устойчивость

$$[\sigma_y] = \varphi_1^{\text{табл}}[\sigma] = 0{,}938 \cdot 160 = 150{,}06\text{МПа}$$

Разница в процентах между действующим напряжением σ и допускаемым напряжением на устойчивость [σ]

$$\frac{|\sigma - [\sigma_y]|}{[\sigma_y]} \cdot 100\,\% = \frac{80 - 150{,}06}{150{,}06} 100\% = 46{,}68\%.$$

Так как 46,68% больше допустимых 5 % , то проводим следующее приближение.

<u>Второе приближение</u>. В качестве начального значения $\varphi_2$ для второго приближения принимается $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1^{\text{табл}}}{2} = \frac{0{,}5 + 0{,}938}{2} = 0{,}719$

Площадь сечения $A_2 = \frac{F}{\varphi_2[\sigma]} = \frac{140 \cdot 10^3}{0{,}719 \cdot 160 \cdot 10^6} = 1{,}217 \cdot 10^{-3}\,\text{м}^2 = 12{,}17\text{см}^2$

Находим $c_2 = \sqrt{\frac{A_2}{7{,}43}} = \sqrt{\frac{12{,}17}{7{,}43}} = 1{,}28\text{см}$. Гибкость $\lambda_2 = \frac{47{,}7}{c} = \frac{47{,}7}{1{,}28} = 37{,}25 \approx 37$.

Представим число $\lambda_2 = 37$ как 30+7. По таблице коэффициентов продольного изгиба φ для стали марки Ст.3 (см. приложения к учебному пособию по «Сопротивлению материалов») находим $\varphi_2^{\text{табл}}$, соответствующее гибкости $\lambda_2$ =37.

при λ = 30 φ = 0,94

при λ = 40 φ = 0,92

Δλ = 10 Δφ = -0,02

Для Δλ = 1 Δφ = -0,002

Тогда $\varphi_2^{\text{табл}}(\lambda = 37) = \varphi(\lambda = 30) + (37 - 30) \cdot \Delta\varphi = 0{,}94 + 7 \cdot (-0{,}002) = 0{,}926$

Напряжения, действующие в стержне

$$\sigma = \frac{F}{A_2} = \frac{140 \cdot 10^3}{1{,}217 \cdot 10^{-3}} = 115 \cdot 10^6\,\text{Па} = 115\text{МПа}.$$

Допускаемое напряжение на устойчивость

$$[\sigma_y] = \varphi_2^{\text{табл}}[\sigma] = 0{,}926 \cdot 160 = 148\text{МПа}$$

Разница в процентах между действующим напряжением σ и допускаемым напряжением на устойчивость [σ]

$$\frac{|\sigma - [\sigma_y]|}{[\sigma_y]} \cdot 100\,\% = \frac{115 - 148}{148} 100\% = 22{,}31\%.$$

Так как 22,31% больше допустимых 5 % , то проводим следующее приближение.

Третье приближение. В качестве начального значения $\varphi_3$ для третьего приближения принимается $\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2^{табл}}{2} = \frac{0,719 + 0,926}{2} = 0,822$

Площадь сечения $A_3 = \frac{F}{\varphi_3[\sigma]} = \frac{140 \cdot 10^3}{0,822 \cdot 160 \cdot 10^6} = 1,064 \cdot 10^{-3} м^2 = 10,64 см^2$

Находим $c_3 = \sqrt{\frac{A_3}{7,43}} = \sqrt{\frac{10,64}{7,43}} = 1,197 см$.

Гибкость $\lambda_3 = \frac{47,7}{c} = \frac{47,7}{1,197} = 39,83 \approx 40$.

По таблице коэффициентов продольного изгиба φ для стали марки Ст.3 (см. приложения к учебному пособию по «Сопротивлению материалов») находим $\varphi_3^{табл} = 0,92$, соответствующее гибкости $\lambda_2$ =40.

Напряжения, действующие в стержне

$$\sigma = \frac{F}{A_3} = \frac{140 \cdot 10^3}{1,064 \cdot 10^{-3}} = 131,56 \cdot 10^6 Па = 131,56 МПа.$$

Допускаемое напряжение на устойчивость

$$[\sigma_у] = \varphi_3^{табл}[\sigma] = 0,92 \cdot 160 = 147,2 МПа$$

Разница в процентах между действующим напряжением σ и допускаемым напряжением на устойчивость [σ]

$$\frac{|\sigma - [\sigma_у]|}{[\sigma_у]} \cdot 100\ \% = \frac{131,56 - 147,2}{147,2} 100\% = 10,66\%.$$

Так как 10,66% больше допустимых 5 % , то проводим следующее приближение.

Четвертое приближение. В качестве начального значения $\varphi_4$ для четвертого приближения принимается $\varphi_4 = \frac{\varphi_3 + \varphi_3^{табл}}{2} = \frac{0,822 + 0,92}{2} = 0,871$

Площадь сечения $A_4 = \frac{F}{\varphi_4[\sigma]} = \frac{140 \cdot 10^3}{0,871 \cdot 160 \cdot 10^6} = 1,004 \cdot 10^{-3} м^2 = 10,04 см^2$

Находим $c_4 = \sqrt{\frac{A_4}{7,43}} = \sqrt{\frac{10,04}{7,43}} = 1,16 см$. Гибкость $\lambda_4 = \frac{47,7}{c} = \frac{47,7}{1,16} = 41$.

Представим число $\lambda_4 = 41$ как 40+1. По таблице коэффициентов продольного изгиба φ для стали марки Ст.3 (см. приложения к учебному пособию по «Сопротивлению материалов») находим $\varphi_4^{табл}$, соответствующее гибкости $\lambda_4$ =41.

при λ = 40 φ = 0,92

при λ = 50 φ = 0,89

$\Delta\lambda = 10$ $\Delta\varphi = -0{,}03$

Для $\Delta\lambda = 1$ $\Delta\varphi = -0{,}003$

Тогда $\varphi_4^{табл}(\lambda = 41) = \varphi(\lambda = 40) + (41 - 40)\cdot\Delta\varphi = 0{,}92 + 1\cdot(-0{,}003) = 0{,}917$

Напряжения, действующие в стержне

$$\sigma = \frac{F}{A_4} = \frac{140\cdot 10^3}{1{,}004\cdot 10^{-3}} = 139{,}4\cdot 10^6\,Па = 139{,}4 МПа.$$

Допускаемое напряжение на устойчивость

$$[\sigma_у] = \varphi_4^{табл}[\sigma] = 0{,}917\cdot 160 = 146{,}72 МПа$$

Разница в процентах между действующим напряжением σ и допускаемым напряжением на устойчивость [σ]

$$\frac{|\sigma - [\sigma_у]|}{[\sigma_у]}\cdot 100\,\% = \frac{139{,}4 - 146{,}72}{146{,}72}100\% = 4{,}98\%.$$

Полученная разница 4,98 % менее 5 % допустимых, следовательно принимаем $c = c_4 = 1{,}16$ см.

3. Определяем критическую силу $F_к$.

Если $\lambda < \lambda_{пред}$, то для определения критической силы используется формула Ясинского $F_{КР} = A\cdot(a - b\cdot\lambda)$, (для стали марки Ст.3 a = 310 МПа, b = 1,14 МПа), а если $\lambda > \lambda_{пред}$, то формула Эйлера $F_к = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu\ell)^2}$. Для стали марки Ст.3 величина гибкости $\lambda_{пред.} = 100$.

Так как гибкость стержня в последнем прближении $\lambda = 41 < \lambda_{пред.}$, то критическую силу определяем по формуле Ясинского

$F_{КР} = A\cdot(a - b\cdot\lambda) = 10{,}04\cdot 10^{-4}(310\cdot 10^6 - 1{,}14\cdot 10^6\cdot 41) = 2643\cdot 10^2$ Н=264,3 кН

Коэффициент запаса устойчивости $n_у = \frac{F_к}{F} = \frac{264{,}3}{140} = 1{,}89$

## РАСЧЕТ НА УДАР

На балку, выполненную из двутавра № 30 ГОСТ 8239-89, свободно лежащую на двух жестких опорах (рис. 18,а), с высоты h = 8 см падает груз весом Q = 1,1 кН. Длина пролета балки ℓ = 2,9 м. Требуется:

1) найти наибольшее нормальное напряжение в балке;
2) решить аналогичную задачу при условии, что правая опора заменена пружиной, податливость которой равна α = 0,02 м/кН;
3) сравнить полученные результаты.

1. Из таблицы сортамента прокатной стали в приложении к учебному пособию по «Сопротивлению материалов» http://techn.sstu.ru/new/SubjectFGOS/Default.aspx?kod=115&tip=4 выписываем для двутавра № 30 значения осевого момента сопротивления $W_x$ = 472 см$^3$ и осевого момента инерции $J_x$ = 7080 см$^4$.

2. Наибольшее динамическое нормальное напряжение, МПа, возникающее в балке от действия ударной нагрузки $\sigma_{Д\,max} = К_Д \cdot \sigma_{ст\,max}$,

где: $К_Д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\Delta_{ст}}}$ – динамический коэффициент;

$\sigma_{ст\,max} = \frac{|M_{max}|}{W_x}$ – наибольшее статическое нормальное напряжение, возникающее в балке от действия статической нагрузки;

h – высота падения груза;

$\Delta_{ст}$ – статический прогиб сечения балки в точке удара;

$M_{max}$ – максимальный изгибающий момент в опасном сечении балки, возникающий от действия статической нагрузки;

$W_x$ – осевой момент сопротивления поперечного сечения балки.

Для определения $\Delta_{ст}$ в сечении С балки используем интеграл Мора

$$\Delta_{ст} = \Delta_{1F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{xF}\overline{M}_{x1}}{EJ_x} dz,$$

где $M_{xF}$ – грузовой изгибающий момент, возникающий от действия статической нагрузки;

$\overline{M}_{x1}$ – единичный изгибающий момент, возникающий от действия единичной нагрузки.

Для определения $\overline{M}_{x1}$ к балке (рис. 18,б) в точке удара (в точке С) и по направлению удара прикладываем единичную фиктивную силу $\overline{\Phi}_1 = 1$. Определяем опорные реакции $R_A$ и $R_B$:

$$\sum M_A = 0; \quad -R_B \ell - \overline{\Phi} \cdot \left(\ell + \frac{\ell}{4}\right) = 0, \quad R_B = \frac{5}{4}.$$

$$\sum M_B = 0; \quad -R_A \ell - \overline{\Phi} \cdot \frac{\ell}{4} = 0, \quad R_A = -\frac{1}{4}.$$

Проверка: $\sum Y = 0; \; R_A + R_B - \overline{\Phi} = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} - 1 = 0.$

Опорные реакции найдены верно.

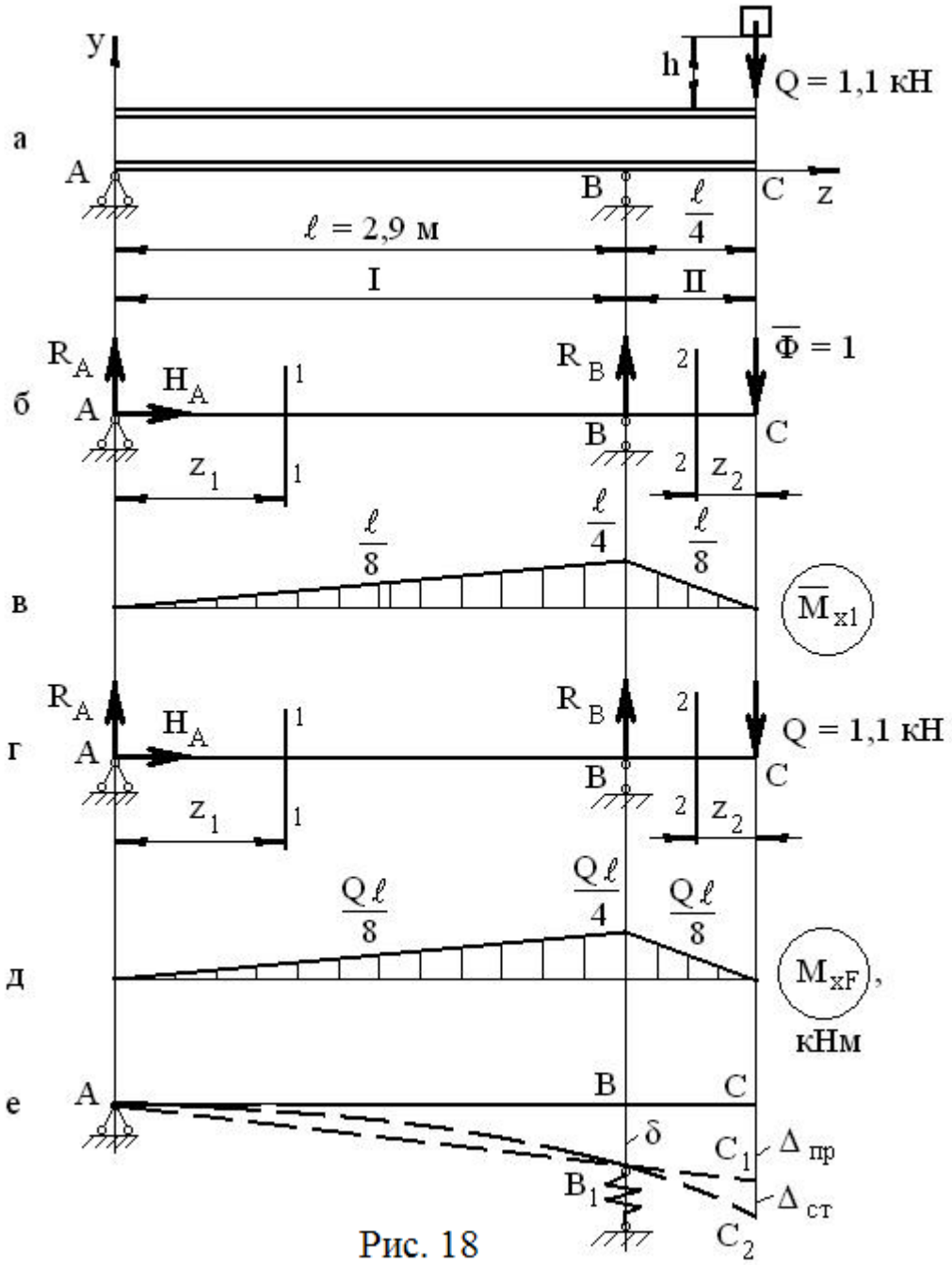
y
h
Q = 1,1 кН
а
A
B
C
z
ℓ = 2,9 м
ℓ/4
I
II
R_A
H_A
R_B
Φ̄ = 1
б
z_1
z_2
ℓ/8
ℓ/4
ℓ/8
в
M̄_x1
Q = 1,1 кН
г
Qℓ/8
Qℓ/4
Qℓ/8
д
M_xF,
кНм
е
δ
C_1
Δ_пр
B_1
Δ_ст
C_2

Рис. 18

Разбиваем балку на два участка и используем метод сечений.

*Участок АС* (рис. 19,а): $0 \le z_1 \le \ell$;

$$\sum M_{O1} = 0; \quad M_x(z_1) - R_A \cdot z_1 = 0; \quad M_x(z_1) = R_A \cdot z_1 = -\frac{z_1}{4};$$

при $z_1 = 0$ $M_x(z_1) = 0$;

при $z_1 = \ell$ $M_x(z_1) = -\frac{\ell}{4}$.

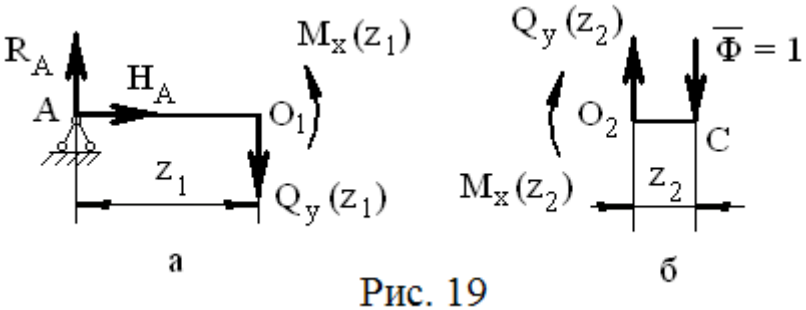


Рис. 19

*Участок СВ* (рис. 19,б): $0 \le z_2 \le \frac{\ell}{4}$:

$$\sum M_{O2} = 0;$$

$$-M_x(z_1) - \overline{\Phi} \cdot z_2 = 0;$$

$M_x(z_1) = -\overline{\Phi} \cdot z_2 = -z_2$; при $z_2 = 0$ $M_x(z_2) = 0$; при $z_2 = \frac{\ell}{4}$ $M_x(z_2) = -\frac{\ell}{4}$.

Эпюра $\overline{M}_{X1}$ изображена на рис. 18,в.

Для определения $M_{xF}$ к балке (рис. 18,г) в точке С прикладываем вектор статической нагрузки Q.

Опорные реакции будут равны: $R_A = \frac{Q}{4}$; $R_B = \frac{5Q}{4}$.

Грузовая эпюра $M_{xF}$ (рис. 18,д) по форме будет точно такой же как и $\overline{M}_{X1}$, но все ее значения будут в Q раз больше.

Вычисляем интеграл Мора способом Симпсона:

$$\Delta_{ст} = \Delta_{1F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{xF}\overline{M}_{x1}}{EJ_x} dz =$$

$$\frac{\ell}{6EJ_x} \cdot \left(4 \cdot \frac{\ell}{8} \cdot \frac{Q\ell}{8} + \frac{\ell}{4} \cdot \frac{Q\ell}{4}\right) + \frac{\ell}{4 \cdot 6EJ_x} \cdot \left(\frac{\ell}{4} \cdot \frac{Q\ell}{4} + 4 \cdot \frac{\ell}{8} \cdot \frac{Q\ell}{8}\right) =$$

$$\frac{Q\ell^3}{48EJ_x} + \frac{Q\ell^3}{192EJ_x} = \frac{5 \cdot Q\ell^3}{192 \cdot EJ_x} = \frac{5 \cdot 1{,}1 \cdot 10^3 \cdot 2{,}9^3}{192 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 7080 \cdot 10^{-8}} = 4{,}93 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Находим динамический коэффициент:

$$K_Д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\Delta_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 8 \cdot 10^{-2}}{4{,}93 \cdot 10^{-5}}} = 57{,}98.$$

Из грузовой эпюры $M_{XF}$ (рис. 18,д) видно, что опасным будет сечение В, в котором действует максимальный изгибающий момент, вызывающий максимальные статические напряжения, равные

$$\sigma_{ст\,max} = \frac{|M_{max}|}{W_x} = \frac{Q\ell}{4W_x} = \frac{1{,}1 \cdot 10^3 \cdot 2{,}9}{4 \cdot 472 \cdot 10^{-6}} = 1{,}69 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1{,}69 \text{ МПа}.$$

В этом же сечении возникают максимальные динамические напряжения

$$\sigma_{Д\,max} = K_Д \cdot \sigma_{ст\,max} = 57{,}98 \cdot 1{,}69 = 97{,}99 \text{ МПа}.$$

2. Заменим правую опору В пружиной (рис. 18,е), податливость которой равна α. Податливость – это осадка пружины от груза, равного 1 кН.

От действия статической нагрузки Q пружина сожмется на величину δ, называемую осадкой пружины. При этом балка повернется относительно точки А и прогнется.

Осадка пружины равна $\delta = R_B \cdot \alpha = \frac{5Q}{4} \cdot \alpha = \frac{5 \cdot 1{,}1}{4} \cdot 0{,}02 = 0{,}0275$ м.

Полное статическое перемещение $\Delta_{C\,ст}$ сечения С балки будет складываться из статического перемещения сечения С балки от ее изгиба $\Delta_{ст}$, найденного выше, и перемещения сечения С от сжатия пружины – $\Delta_{пр}$.

Из подобия треугольников $ABB_1$ и $ACC_1$ находим:

$$\frac{\delta}{\Delta_{пр}} = \frac{AB}{AC}; \quad \frac{\delta}{\Delta_{пр}} = \frac{\ell}{\frac{5\ell}{4}}; \quad \Delta_{пр} = \frac{5\delta}{4} = \frac{5 \cdot 0{,}0275}{4} = 3{,}4375 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Тогда полное статическое перемещение сечения С балки:

$$\Delta_{C\,ст} = \Delta_{ст} + \Delta_{пр} = 4{,}93 \cdot 10^{-5} + 3{,}4375 \cdot 10^{-2} = 3{,}4424 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Динамический коэффициент в этом случае равен:

$$K_Д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\Delta_{C\,ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 8 \cdot 10^{-2}}{3{,}4424 \cdot 10^{-2}}} = 3{,}3765.$$

Максимальное динамическое напряжение в балке с пружиной:

$$\sigma_{Д\,max} = K_Д \cdot \sigma_{ст\,max} = 3{,}3765 \cdot 1{,}69 = 5{,}71 \text{ МПа.}$$

3. Сравним максимальные динамические напряжения в балке на жестких опорах и в балке с пружиной. В балке на жестких опорах максимальные динамические напряжения больше, чем в балке с пружиной в

$$\frac{97{,}99}{5{,}71} = 17{,}16 \text{ раз.}$$

## РАСЧЕТ НА КОЛЕБАНИЯ

На двух балках, выполненных из двутавра № 24а, установлен двигатель весом Q = 19 кН (рис. 20,а), делающий n = 700 об/мин. Длина пролета балки $\ell = 1{,}7$ м. Центробежная сила инерции, возникающая вследствие неуравновешенности вращающихся частей двигателя, равна H = 7 кН. Собственный вес балок и силы сопротивления можно не учитывать. Модуль упругости материала балок $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

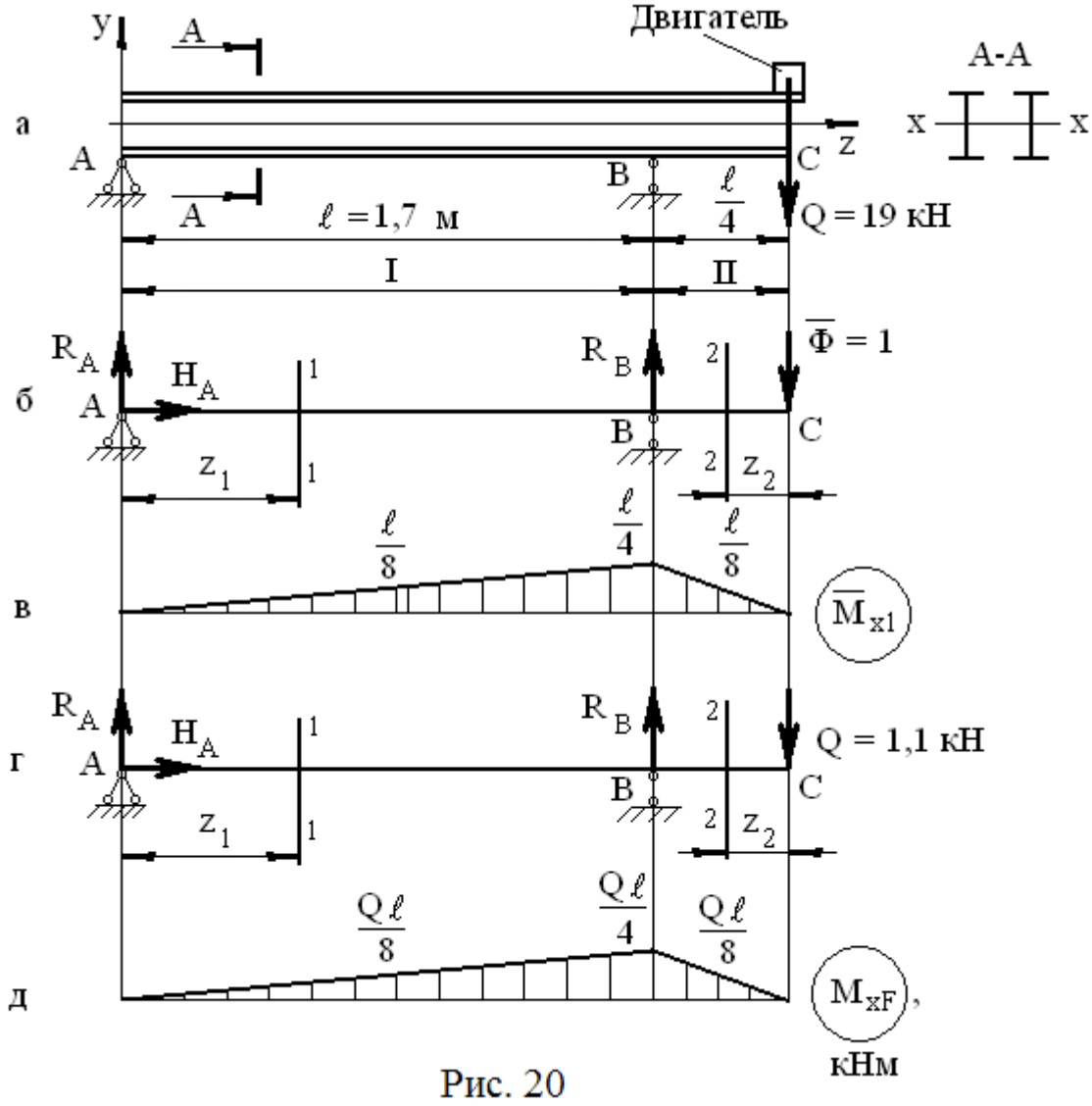


Рис. 20

Требуется:

1) определить частоту собственных колебаний балок $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\Delta_{ст}}}$,

где g – ускорение силы тяжести;

$\Delta_{ст}$ – статический прогиб балки, в точке приложения нагрузки Q.

2) определить частоту изменения возмущающей силы $\omega = \dfrac{\pi n}{30}$;

3) найти коэффициент нарастания колебаний по формуле $\beta = \dfrac{1}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_o}\right)^2}$. Если коэффициент β, определяемый по этой формуле, окажется отрицательным, то в дальнейшем расчете следует учитывать его абсолютную величину;

4) найти динамический коэффициент по формуле $K_д = 1 + \dfrac{H}{Q}\beta$.

5) определить наибольшее динамическое нормальное напряжение в балках $\sigma_д$;

6) проверить прочность балок по допускаемому напряжению [σ] = 125 МПа.

Из таблицы сортамента прокатной стали в приложении к учебному пособию по «Сопротивлению материалов» http://techn.sstu.ru/new/SubjectFGOS/Default.aspx?kod=115&tip=4 выписываем для двутавра № 24а значения осевого момента сопротивления $W_x$ = 317 см$^3$ и осевого момента инерции $J_x$ = 3800 см$^4$.

Величину прогиба $\Delta_{ст}$ как и предыдущей задаче находим с помощью интеграла Мора и способа Симпсона. Для этого построим эпюры изгибающих моментов от единичной нагрузки $\overline{M}_{x1}$ (рис. 20,в) и от заданной нагрузки Q – $M_{xF}$ (рис. 20,д). Расчет изгибающих моментов и построение эпюр ведем аналогично расчету, показанному в предыдущей задаче.

Интеграл Мора будет равен:

$$\Delta_{ст} = \Delta_{1F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{xF}\overline{M}_{x1}}{E \cdot 2J_x} dz =$$

$$\frac{\ell}{6E \cdot 2J_x} \cdot \left(4 \cdot \frac{\ell}{8} \cdot \frac{Q\ell}{8} + \frac{\ell}{4} \cdot \frac{Q\ell}{4}\right) + \frac{\ell}{4 \cdot 6E \cdot 2J_x} \cdot \left(\frac{\ell}{4} \cdot \frac{Q\ell}{4} + 4 \cdot \frac{\ell}{8} \cdot \frac{Q\ell}{8}\right) =$$

$$\frac{Q\ell^3}{48E \cdot 2J_x} + \frac{Q\ell^3}{192E \cdot 2J_x} = \frac{5 \cdot Q\ell^3}{192 \cdot E \cdot 2J_x} =$$

$$\frac{5 \cdot 19 \cdot 10^3 \cdot 1{,}7^3}{192 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 3800 \cdot 10^{-8}} = 1{,}5993 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Тогда частота собственных колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{9{,}81}{1{,}5993 \cdot 10^{-4}}} = 247{,}67 \quad \text{с}^{-1}.$$

Круговая частота ω вынужденных колебаний равна угловой скорости вращения ротора двигателя

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3{,}14 \cdot 700}{30} = 73{,}27 \quad c^{-1}.$$

Критическая угловая скорость вращения вала двигателя, при которой может возникнуть резонанс

$$n = \frac{30 \cdot \omega_0}{\pi} = \frac{30 \cdot 247{,}67}{3{,}14} = 2366 \text{ об/мин.}$$

Коэффициент нарастания колебаний $\beta = \dfrac{1}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_o}\right)^2} = \dfrac{1}{1 - \left(\dfrac{73{,}27}{247{,}67}\right)^2} = 1{,}096$

Динамический коэффициент $K_д = 1 + \dfrac{H}{Q}\beta = 1 + \dfrac{7}{19} \cdot 1{,}096 = 1{,}4$

Из грузовой эпюры $M_{XF}$ (рис. 20,д) видно, что опасным будет сечение В, в котором действует максимальный изгибающий момент, вызывающий максимальные статические напряжения

$$\sigma_{ст\,max} = \frac{|M_{max}|}{2W_x} = \frac{Q\ell}{4 \cdot 2W_x} = \frac{19 \cdot 10^3 \cdot 1{,}7}{4 \cdot 2 \cdot 317 \cdot 10^{-6}} = 12{,}74 \cdot 10^6 \text{ Па} = 12{,}74 \text{ МПа}.$$

В этом же сечении возникают максимальные динамические напряжения $\sigma_{Д\,max} = K_Д \cdot \sigma_{ст\,max} = 1{,}4 \cdot 12{,}74 = 17{,}84$ МПа.

Проверяем прочность балок по динамическому напряжению

$$\sigma_{Д\,max} = 17{,}84 \text{ МПа} < [\sigma] = 125 \text{ МПа}.$$

Следовательно, балка удовлетворяет условию прочности.

**Тихонов Денис Александрович**
**Гильман Александр Абрамович**

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

## Методические указания к решению задач

Ответственный за выпуск Тихонов Д.А.
Оригинал-макет Тихонов Д.А.

413100, Россия, Саратовская область, г. Энгельс, пл. Свободы, 17

ЭТИ (филиал) СГТУ имени Гагарина Ю.А.

Регистрационный номер 26.